
SESSIONS DE PREPARACIÓ PER A L'OLIMPIADA MATEMÀTICA



Barcelona, octubre de 1997

SESSIONS DE PREPARACIÓ PER A L'OLIMPIADA MATEMÀTICA



Barcelona, octubre de 1997

This One



453D-EFL-4E11

© 1997, dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques
(filial de l'Institut d'Estudis Catalans)
Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Imprès a Grup Artyplan - Artypres, SA
Carrer de Muntaner, 277. 08021 Barcelona

Dipòsit Legal: B. 41103-1997

ÍNDIX

Presentació	1
Guanyadors del curs 1996-97	3
Problemes de les Olimpíades XV a XXXIII	5
Geometria	81
<i>Sebastià Xambó i Descamps</i>	
Probabilitat	127
<i>Josep Pla i Carrera</i>	
Aritmètica	145
<i>Griselda Pascual i Xufré</i>	
Polinomis	179
<i>Lluís Bibiloni i Matos, Pelegrí Viader i Canals</i>	
Successions recurrents	195
<i>Josep M. Brunat i Blay</i>	
Desigualtats	207
<i>Ignasi Mundet i Riera</i>	
Disseccions geomètriques	219
<i>Joan Trias i Pairó</i>	
Equacions funcionals	237
<i>Claudi Alsina i Català</i>	

Presentació i agraïments

Una vegada més surt a la llum aquesta publicació, com sempre amb la intenció d'anar-la ampliant i corregint. El capítol *Polinomis* ha estat escrit de nou i la recopilació de problemes d'Olimpiades passades arriba ja de la XV (1978-79) fins la XXXIII del darrer curs (1996-97).

Els capítols són propietat dels corresponents autors i tots ells n'han fet una gratuïta cessió d'ús a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Les sessions de preparació compten amb la participació dels autors i d'altres professors a Barcelona, Girona, Lleida i Tarragona.

En nom de la SCM vull deixar constància pública de l'agraïment de la Societat, al qual hi afegeixo el meu propi, envers els autors i totes les persones i institucions que fan possibles es sessions. En especial, vull esmentar el professor Francisco Bellot Rosado, de Valladolid, que com ja és habitual, m'ha seguit informant i ajudant en tot el que li he demanat.

Josep Grané

Guanyadors del curs 1996-97

XXXIII Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primer premi

Xavier Pérez Giménez

IB Joan Boscà (Barcelona)

Segon premi

Max Bernstein Obiols

Aula Escola Europea (Barcelona)

Tercer premi

Xavier Gratal Martínez

IB Màrius Torres (Lleida)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Anatoli Segura Vélez	(Baza, Granada)
2	Miguel Lobo López	(Martos, Jaén)
3	Mario Andrés Montes García	(Salamanca)
4	Max Bernstein Obiols	(Barcelona)
5	Joseba Villate Bejarano	(Algorta, Biscaia)
6	Xavier Pérez Giménez	(Barcelona)

Sergi Elizalde Torrent va participar-hi, fora de concurs, ja que per edat podia tornar a concursar a la *XII Olimpíada Iberoamericana*. Va obtenir la puntuació més alta de tots els concursants, i va tenir dues mencions especials per la qualitat de la resolució de dos problemes.

38th International Mathematical Olympiad (Mar del Plata, Argentina)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 460 presentats):

Romania, 1:	Ciprian Manolescu
USA, 1:	Carleton Bosley
Iran, 1:	Eaman Eftekhari
Vietnam, 1:	Do Quoc Anh

Resultats dels concursants espanyols a la *XII Olimpíada Iberoamericana* celebrada a Guadalajara (Jalisco), Mèxic:

- Sergi Elizalde, *medalla de plata*.
- Miguel Lobo, Mario Andrés Montes i Xavier Pérez, *medalles de bronze* cada un.

CURS 1978-79

Problemes de la XV Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1978-79

Primera sessió. Abril de 1979.

15C1.—Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Demostreu que per a tot n natural més gran que 2, es compleix:

a) $p(n) = 6h$, on h és un natural.

b) $h + 1$ no és primer.

15C2.—Un tetràedre de l'espai euclidià E_3 té dos parells d'arestes oposades ortogonals. Demostreu que el tercer parell també ho és.

15C3.—La fórmula de de Moivre, vàlida per a exponents naturals, és

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

És aplicable aquesta fórmula amb exponents racionals? En cas negatiu, tracteu d'obtenir-ne una generalització resolent l'equació

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{p/q} = \cos x + i \sin x.$$

15C4.—Tenim tres bosses i cada una conté n boles numerades $1, 2, \dots, n$. S'extreu a l'atzar una bola de cada bossa. Siguin x, y, z els números de les boles tretes. Calculeu la probabilitat que $x + y = z$.

Segona sessió. Abril de 1979.

15C5.—Siguin γ_1 i γ_2 dues circumferències exteriors i r una recta exterior a totes dues que i les deixa en un mateix semiplà. Determineu els punts P d'aquesta recta que tenen la propietat que les tangents traçades des de P a les circumferències formin amb r angles iguals.

15C6.—Proveu que per a tot enter positiu n , el nombre $a = 3^n - 2n^2 - 1$ és divisible per 8. Demostreu també que si n no és múltiple de 3, el nombre a definit abans, és divisible per 24.

15C7.—Trobeu una funció f definida a l'interval $[-3, 0]$, contínua, derivable i positiva, tal que

- a) Per $x = -1$ té un extrem relatiu.
- b) L'àrea limitada pel gràfic de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -3$ i $x = 0$ val 6 unitats d'àrea.
- c) $f(-1) = 1$.

15C8.—Trobeu el valor de $(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$, essent n un nombre natural múltiple de 3.

Problemes de la XVI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1978-79

Primera sessió. Juny de 1979.

15E1.—Calculeu l'àrea de la intersecció de l'interior de l'el·lipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

amb el cercle limitat per la circumferència $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

15E2.—Cert professor d'Oxford, destinat als serveis de criptografia de l'espionatge britànic, paper interpretat per Dirk Bogarde en una pel·lícula, recruta el personal proposant petits exercicis d'atenció, com ara llegir mentalment una paraula al revés. Frequentment ho fa amb el seu propi nom: SEBASTIAN s'ha de llegir NAITSALES.

Es pregunta si hi ha algun moviment del pla o de l'espai que transformi un d'aquests mots en l'altre, tal com apareixen escrits. I si s'hagues dit AVITO, com un cert personatge d'Unamuno? Expliqueu raonadament la resposta.

15E3.—Demostreu la igualtat

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

15E4.—Si z_1, z_2 són les arrels de l'equació amb coeficients reals $z^2 + az + b = 0$, proveu que $z_1^n + z_2^n$ és un nombre real per a qualsevol valor natural de n . En el cas particular de l'equació $z^2 - 2z + 2 = 0$, expresseu, en funció de n aquesta suma.

Segona sessió. Juny de 1979.

15E5.—Calculeu la integral definida

$$\int_2^4 \sin((x-3)^3) dx.$$

15E6.—Es col·loquen tres boles en una urna pel següent procediment: es tira una moneda tres vegades i s'introdueix, cada vegada que surt cara una bola blanca a l'urna, i cada vegada que surt creu, una bola negra. Extraïem una bola de la urna, anotem el seu color i la hi retornem. Si repetim el procés quatre vegades, quina és la probabilitat d'haver obtingut quatre boles blanques?

15E7.—Proveu que el volum d'un pneumatic (tor) és igual al volum d'un cilindre la base del qual és una secció meridiana d'aquell i que té per altura la longitud de la circumferència formada pels centres de les seccions meridianes.

15E8.—Donat el polinomi

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + 1001x^{500},$$

expresseu el valor numèric de la seva derivada d'ordre 325 al punt $x = 0$.

Problemes de la XVI Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1979-80

Primera sessió.

16C1.—Sabent que 75 bous mengen en 12 dies l'herba d'un prat de 60 àrees, i que 81 bous mengen en 15 dies l'herba d'un altre prat de 72 àrees, calculeu quants bous caldran per menjar en 18 dies l'herba d'un prat de 96 àrees. Se suposa que en els tres prats l'herba té la mateixa altura en el moment d'entrar-hi els bous i que continua creixent uniformement després que hi hagin entrat.

16C2.—Donada la paràbola $y = ax^2$ i dos dels seus punts A i B d'abscisses $x_1 < x_2$, es demana:

a) Calculeu, en funció de x_1, x_2 l'àrea del triangle ABC , essent C el punt de la paràbola en el qual la tangent és paral·lela a la recta AB .

b) Aplicant reiteradament el procés anterior, calculeu l'àrea del segment de paràbola limitat per la corda AB .

16C3.—Siguin z i w dos nombres complexos que compleixen la relació

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

on a, b, c, d són reals. Demostreu que si $ad - bc > 0$, llavors les parts imaginàries de z i w tenen el mateix signe.

(Observació: Calculeu $w - \bar{w}$, on $\bar{w}$ és el conjugat de w).

16C4.—A $\mathbb{R}^3$ es considera el tetràedre $DABC$.

a) Demostreu que les rectes que uneixen cada un dels vèrtexs del tetràedre amb el baricentre de la cara oposada, es tallen en un punt G .

b) Demostreu que els vectors que uneixen el punt D amb cada un dels baricentres de les cares del tetràedre que passen per D , són una base de l'espai vectorial dels vectors lliures de $\mathbb{R}^3$.

Segona sessió.

16C5.—A partir d'un significat geomètric de la integral definida, calculeu

$$\int_{-2}^0 \sqrt{-x^2 - 2x} \, dx.$$

16C6.—Demostreu que si els costats d'un triangle estan en progressió geomètrica, la raó està compresa entre

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

16C7.—Al congrés d'un partit polític hi participen 2000 afiliats. Un periodista observa que, dels presents en una sessió, el 12.1212...% són dones, i el 23.423423...% pertanyen a la branca radical. Es demana el nombre de participants que falten en aquesta sessió.

16C8.—Es considera la successió recurrent

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{amb} \quad a_1 = 14.$$

Demostreu per inducció que, per a tot $n \geq 1$, el nombre

$$\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$$

és un enter divisible per 4. Com a aplicació, demostreu que existeixen infinits triangles tals que les mesures dels costats són enters consecutius i l'àrea és també un nombre enter.

Problemes de la XVI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1979-80

Primera sessió.

16E1.—D'entre tots els triangles que tenen un costat de 5 m de longitud i l'angle oposat de 30° , determineu el d'àrea màxima, calculant el valor dels altres dos angles i l'àrea del triangle.

16E2.—Una urna conté els vots per a l'elecció de dos candidats A i B . Se sap que el candidat A té 6 vots segurs i el candidat B en té 9. Trobeu la probabilitat que, en efectuar l'escrutini, sempre vagi per davant el candidat B .

16E3.—Demostreu que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ són nombres reals positius, aleshores

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Digueu quan és vàlida la igualtat.

16E4.—Trobeu la funció $f(x)$ que compleix l'equació

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0$$

sabent que $f(1) = e$. Representeu gràficament aquesta funció i calculeu la tangent en el punt de la corba d'abscissa 1.

Segona sessió.

16E5.—Demostreu que si x és tal que

$$x + \frac{1}{x} = \cos \alpha$$

llavors, per a tot $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha.$$

16E6.—Demostreu que si al producte de quatre nombres naturals consecutius s'afegeix una unitat, el resultat és un quadrat perfecte.

16E7.—El punt M varia sobre el segment AB que mesura 2 m.

a) Trobeu l'equació i la representació gràfica del lloc geomètric dels punts del pla les coordenades dels quals, x , y , són, respectivament, les àrees dels quadrats de costats AM i BN .

b) Digueu quina classe de corba és. (Suggeriment: feu un gir d'eixos de 45°).

c) Trobeu l'àrea del recinte comprès entre la corba obtinguda i els eixos de coordenades.

16E8.—Determineu tots els triangles tals que les longituds dels tres costats i la seva àrea són quatre nombres naturals consecutius.

CURS 1980-81

Problemes de la XVII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1980-81

Primera sessió. 24 d'Abril de 1981.

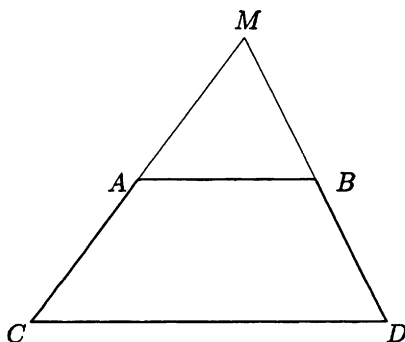
17C1.—Tres nombres diferents posats en un cert ordre estan en progressió aritmètica, i posats en un altre ordre estan en progressió geomètrica. Busqueu la raó d'aquesta progressió geomètrica.

17C2.—Calculeu

$$\int_3^6 ([x] + \sqrt{x - [x]}) dx,$$

on $[x]$ designa la part entera del nombre real x .

17C3.—Un trapezi té els dos vèrtexs C , D d'una base fixos. L'altra base AB és de longitud constant i la suma de les longituds dels costats CA i DB també és constant. Trobeu la figura que descriu el punt M intersecció de les rectes CA i DB .



Segona sessió. 25 d'Abril de 1981.

17C4.—Direm que un políedre és *regular* si totes les cares són polígons del mateix nombre k de costats i a cada vèrtex hi concorren el mateix nombre n d'arestes.

Utilitzant que el nombre de cares menys el d'arestes més el de vèrtexs d'un políedre és sempre 2, demostreu que els únics políedres regulars són el tetràedre, l'hexàedre, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre.

17C5.—Tres jugadors convenen que quan un perdi una partida donarà a cada un dels altres la quantitat de diners que en aquell moment tingui cada un. Després de jugar tres partides cada un d'ells en perd una i es retiren amb 40 duros cada un. Quants duros tenien en començar?

17C6.—Sigui A l'àrea d'un pentàgon regular i a l'àrea del pentàgon format per les diagonals del primer. Demostreu que

$$a = A \left(\frac{\sin 18^\circ}{1 - 2 \sin^2 18^\circ} \right)^2.$$

Problemes de la XVII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1980-81

Primera sessió. Juny de 1981.

17E1.—Calculeu la suma de n sumands

$$7 + 77 + 777 + \cdots + 7 \dots 7.$$

17E2.—Un vas de vidre cilíndric té 8 cm d'altura i la seva vora 12 cm de circumferència. Al seu interior, a 3 cm de la vora, hi ha una diminuta gota de mel. En un punt de la superfície exterior, en el pla que passa per l'eix del cilindre i per la gota de mel, i situat a 1 cm de la base (fons) del vas, hi ha una mosca. Digueu quin és el camí més curt que ha de recórrer la mosca caminant per la superfície del vas, per tal d'arribar a la gota de mel. Trobeu també la longitud d'aquest camí.

17E3.—Donades les rectes que es creuen r i s , es consideren les rectes u i v tals que:

- a) u és simètrica de r respecte de s ,
- b) v és simètrica de s respecte de r .

Determineu l'angle que han de formar les rectes donades per tal que u i v siguin coplanàries.

17E4.—Calculeu la integral

$$\int \frac{dx}{\sin(x-1)\sin(x-2)}.$$

Suggeriment: Canvi $\tan x = t$.

Segona sessió. Juny de 1981.

17E5.—Donat un nombre natural no nul n , sigui f_n la funció de l'interval tancat $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ definida així:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ 3/n, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es demana:

- a) Representar gràficament la funció.
- b) Calcular $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
- c) Trobar, si existeix, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

17E6.—Demostreu que la transformació producte de la simetria de centre $(0, 0)$ per la simetria d'eix la recta d'equació $x = y + 1$, pot expressar-se com a producte d'una simetria d'eix la recta e per una translació de vector $\vec{v}$, amb e paral·lela a $\vec{v}$. Determineu una recta e i un vector $\vec{v}$ que compleixin les condicions indicades. Són únics e i $\vec{v}$?

17E7.—En una fàbrica de pilotes de tennis hi ha 4 màquines m_1, m_2, m_3, m_4 , que produeixen, respectivament, el 10%, 20%, 30% i 40% de les boles que surten de la fàbrica. La màquina m_1 introdueix defectes en un 1% de les boles que fabrica, la màquina m_2 en el 2% de les que produeix, la m_3 en el 4% i la m_4 en el 15%. De totes les pilotes fabricades en un dia, se'n tria una a l'atzar i resulta ser defectuosa. Digueu quina és la probabilitat que aquesta bola hagi estat elaborada per la màquina m_3 .

17E8.—Si a és un nombre senar, demostreu que

$$a^4 + 4a^3 + 11a^2 + 6a + 2$$

és una suma de tres quadrats i que és divisible per 4.

CURS 1981-82

Problemes de la XVIII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1981-82

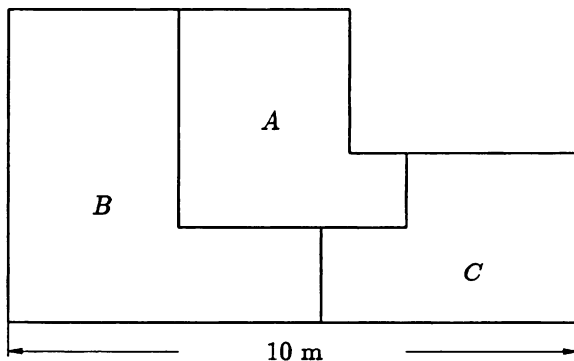
Primera sessió. 7 de Maig de 1982, tarda.

18C1.—Sabent que en un cert instant la busca petita d'un rellotge està entre les 10 i les 11, i la busca gran entre la 1 i les 2, i que al cap d'un cert temps les busques han intercanviat els seus llocs, calculeu el temps transcorregut entre aquests dos instants.

18C2.—Un cos sòlid té per base un cercle de radi r i tota secció ortogonal a un diàmetre fix és un triangle equilàter. Calculeu:

- a) la naturalesa de la corba que determina el llom del sòlid;
- b) el volum del cos.

18C3.—Sabent que les figures A , B , C del croquis són iguals, calculeu la seva àrea. (Tots els angles són rectes i els segments rectilinis.)



Segona sessió. 8 de Maig de 1982, matí.

18C4.—Un safareig té tres aixetes A , B i C . Si obrim A i B el safareig s'omple en dues hores, si obrim A i C s'omple en tres hores i si obrim B i C s'omple en sis hores. Quant tardaria a omplir-se el safareig si les obrim totes tres alhora?

18C5.—Quatre esferes descansen totes sobre un mateix pla. Cada esfera és tangent a les altres tres. Se sap que tres de les esferes tenen el mateix radi R . Es demana el radi r de la quarta esfera en funció de R .

18C6.—Tenim n boles i sabem que comptades de 8 en 8 en queden 7, comptades de 9 en 9 en queden 8 i comptades de 10 en 10 en queden 9. Podem saber quantes en queden comptades de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, de 6 en 6 i de 7 en 7?

Problemes de la XVIII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1981-82

Primera sessió. Juny de 1982.

18E1.—A la pàgina de passatemps d'un diari es proposa el passatemps següent: “Dos nens, Antoni i Josep, tenen 160 tebeos. L'Antoni compta els seus de 7 en 7 i li'n sobren 4. En Josep compta els seus de 8 en 8 i també li'n sobren 4. Quants tebeos tenen cadascun?” Al següent número del diari es dona la solució: “L'Antoni té 60 tebeos i en Josep en té 100.” Analitza aquesta solució i indica què faria una matemàtic amb aquest problema.

18E2.—En compondre una simetria d'eix r amb un gir d'angle recte al voltant d'un punt P que no pertany a la recta, resulta un moviment M .

És M una simetria axial? Hi ha alguna recta invariant per M ?

18E3.—Es llança un coet i arriba als 120 m d'altura; a la caiguda perd 60 m, a continuació recupera 40 m, torna a perdre'n 30, a guanyar-ne 24, a perdre'n 20, etc.

Si el procés segueix indefinidament, a quina altura tendeix a estabilitzar-se?

18E4.—Determineu un polinomi de coeficients reals no negatius que compleixi les dues condicions següents:

$$p(0) = 0, \quad p(|z|) \leq x^4 + y^4,$$

essent $|z|$ el mòdul del nombre complex $z = x + iy$.

Segona sessió. Juny de 1982.

18E5.—Construïu un quadrat coneixent la suma de la diagonal i el costat.

18E6.—Demostreu que si u , v són nombres reals no negatius qualssevol, i a , b nombres reals positius tals que $a + b = 1$, aleshores

$$u^a v^b \leq au + bv.$$

18E7.—Sigui S el subconjunt de nombres racionals que es poden escriure en la forma a/b , on a és un enter qualsevol i b un enter senar. Digueu si la suma i el producte de dos elements de S també hi pertany. Digueu si a S hi ha elements tals que l'invers també hi pertany.

18E8.—Donat un conjunt C de punts del pla, s'anomena distància d'un punt P del pla al conjunt C a la més petita de les distàncies de P a cada un dels punts de C . Siguin els conjunts $C = \{A, B\}$, amb $A = (1, 0)$ i $B = (2, 0)$; i $C' = \{A', B'\}$ amb $A' = (0, 1)$ i $B' = (0, 7)$, en un sistema de referència ortonormal.

Trobeu i dibuixeu el conjunt M de punts del pla que equidisten de C i C' .

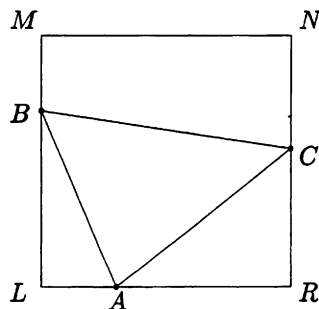
Estudieu si és derivable la funció que té per gràfic el conjunt M obtingut abans.

Problemes de la XIX Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1982-83

Primera sessió. 17 de Desembre de 1982, de 16 h a 20 h.

19C1.—Sobre un quadrat $LMNR$ de costat 1 tenim tres punts A , B , C tals que les figures ALB , ARC i $BMNC$ tenen la mateixa àrea. Calculeu l'àrea màxima i mínima del triangle ABC .



19C2.—Determineu els nombres naturals n que divideixen tots els nombres naturals les darreres xifres dels quals són exactament les xifres de n .

19C3.—Demostreu que si $0 < t < \pi$ aleshores $\sin(t/2) > t/\pi$.

19C4.—Es posa una rata en una caixa que té quatre sortides aparentment iguals. Una de les sortides es considera *bona* i les altres *dolentes*; si la rata tria una sortida dolenta, rep una decàrrega elèctrica que no la deixa sortir. Es demana quina és la probabilitat que la rata surti de la caixa en un màxim de tres intents, considerant:

- a) que la rata no té memòria;
- b) que la rata té memòria.

Segona sessió. 18 de Desembre de 1982, de 9 h a 13 h.

19C5.—Digueu en quants zeros acaba el nombre 1000!

19C6.—Digueu quina condició han de complir els nombres complexos α i β per tal que els punts α , β , $\alpha + \beta$ i $\alpha\beta$ siguin vèrtexs d'un paral·lelogram.

19C7.—Sigui O l'ortocentre d'un triangle (és a dir, el punt d'intersecció de les altures), i A i B els punts d'intersecció d'una altura amb el costat corresponent i amb la circumferència circumscrita al triangle, respectivament. Hi ha alguna relació entre els segments OA i OB ?

19C8.—Determineu el volum mínim V_n d'una piràmide regular recta de n costats circumscrita a una esfera donada. Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n.$$

Problemes de la XIX Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1982-83

Primera sessió. Febrer de 1983.

19E1.—Mentre Teofrast parlava amb Aristòtil sobre la classificació de les plantes, tenia un gos lligat a una columna cilíndrica de radi r perfectament llisa, amb una corda molt fina que envoltava la columna i amb un llaç de baga escorredora. El gos estava lligat a l'extrem lliure de la corda. En intentar arribar a Teofrast, el gos va tibar la corda i la trencà. Digueu quina era la distància de la columna al nus en el moment de trencar-se.

19E2.—Construïu un triangle coneixent un angle, la raó dels costats que el formen i el radi del cercle inscrit.

19E3.—Una semicircumferència de radi r es divideix en $n + 1$ parts iguals i s'uneix un punt qualsevol k de la divisió amb els extrems de la semicircumferència, formant així un triangle A_k . Calculeu el límit, quan n tendeix a infinit, de la mitjana aritmètica de les àrees dels triangles.

19E4.—Determineu el nombre d'arrels reals de l'equació

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + m = 0.$$

Segona sessió. Febrer de 1983.

19E5.—Trobeu les coordenades dels vèrtexs d'un quadrat $ABCD$, sabent que A és sobre la recta $y - 2x - 6 = 0$, C és sobre $x = 0$ i B és el punt $(a, 0)$, essent $a = \log_{2/3}(16/81)$.

19E6.—En una cafeteria, un vas de llimonada, tres entrepans i set ensaïmades han costat 1 xíling i 2 penics; i un vas de llimonada, quatre entrepans i 10 ensaïmades valen 1 xíling i 5 penics. Trobeu el preu de:

a) un vas de llimonada, un entrepà i una ensaïmada;

b) dos vasos de llimonada, tres entrepans i cinc ensaïmades.

(1 xíling = 12 penics).

19E7.—Un tetràedre regular d'aresta 30 cm descansa sobre una de les seves cares i és buit per dintre. Es posa a l'interior 2 l d'aigua. Es demana l'altura a la qual arriba l'aigua i l'àrea de la superfície lliure del líquid.

19E8.—L'any 1960, el més gran de tres germans té una edat que és la suma de les dels dos germans més petits. Uns anys després, la suma de les edats de dos dels germans és doble que l'edat de l'altre. Han passat ara un nombre d'anys des de 1960, que és igual a dues tercers parts de la suma de les edats que els tres germans tenien el 1960, i un d'ells té 21 anys. Quina edat tenen els altres dos?

CURS 1983-84

Problemes de la XX Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1983-84

Primera sessió. 16 de Desembre de 1983, de 16 h a 20 h.

20C1.—Trobeu totes les funcions f , definides en el conjunt dels nombres reals estrictament positius, que prenen valors reals estrictament positius, i que compleixen

$$1) \quad f(xf(y)) = yf(x) \quad \text{per a tot } x, y \text{ positius.}$$

$$2) \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{si } x \rightarrow \infty.$$

20C2.—Determineu els triangles tals que l'altura i la mitjana concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en tres parts iguals.

20C3.—Demostreu que si la funció $f(x)$ és contínua, positiva i decreixent per a $x \geq 0$, i compleix

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = S,$$

aleshores

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0.$$

Segona sessió. 17 de Desembre de 1983, de 9 h a 13 h.

20C4.—Donat un triangle ABC , considerem el triangle $A_1B_1C_1$ que té els vèrtexs sobre els costats oposats a A , B i C , respectivament, i els seus costats són perpendiculars als costats del primer triangle. Calculeu la raó de les àrees dels dos triangles en funció dels angles del triangle ABC .

20C5.—Trobeu el mínim nombre natural m tal que $m!$ és divisible per 7^{1983} .

20C6.—Donat un triangle equilàter, considerem les rectes que passen pel punt mitjà d'un costat. Estudieu la variació de la longitud dels segments d'aquestes rectes interceptats pel triangle.

Problemes de la XX Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1983-84

Primera sessió. Febrer de 1984.

20E1.—En una posició O d'un aeroport de campanya hi ha un canó que pot girar 360° . Dos tancs ataquen aquest lloc seguint trajectòries rectes AB i CD donades. Trobeu gràficament l'abast del canó sabent que la suma de les longituds dels segments de trajectòria dels tancs en els quals aquests estan sota el foc del canó, és una longitud donada ℓ .

20E2.—Determineu un nombre de cinc xifres tal que el seu quadrat acabi en les mateixes cinc xifres col·locades en el mateix ordre.

20E3.—Donats dos nombres reals positius p, q tals que $p + q = 1$, i sabent que tot parell de nombres reals x, y compleix $(x - y)^2 \geq 0$, es demana que demostreu

a)
$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

b)
$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2,$$

c)
$$\left(p + \frac{1}{p} \right)^2 + \left(q + \frac{1}{q} \right)^2 \geq \frac{25}{2},$$

20E4.—Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}.$$

Segona sessió. Febrer de 1984.

20E5.—Portem arcs iguals $AB = A'B' = x$ sobre dues circumferències iguals a partir de dos punts fixos A, A' sobre cada una d'elles. Trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans del segment BB' en variar x :

- a) si posem els arcs en el mateix sentit,
- b) si posem els arcs en sentits oposats.

20E6.—Es considera una circumferència γ de centre $(3,0)$ i radi 3, i la recta r paral·lela a l'eix Ox que dista 3 de l'origen. Es traça una recta variable per l'origen que talla γ en el punt M i la recta r en P . Determineu el lloc geomètric dels punts d'intersecció de les paral·leles a Ox i Oy traçades per M i P respectivament.

20E7.—Es consideren nombres naturals escrits en el sistema de base 10.

a) Trobeu el menor nombre que en suprimir-li la primera xifra quedi reduït a la cinquena part. Digueu com són els nombres que tenen aquesta propietat.

b) Demostreu que no existeix cap nombre tal que en suprimir-li la primera xifra quedi dividit per 12.

c) Formuleu un criteri general que ens permeti saber si un nombre pot quedar dividit per k en suprimir-li la primera xifra.

20E8.—Trobeu el residu de la divisió per $x^2 - 1$ del determinant

$$\begin{vmatrix} x^3 + 3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2 + 5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4 + x^2 + 1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5 + 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

CURS 1984-85

Problemes de la XXI Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1984-85

Primera sessió. 18 de Gener de 1985, de 16 h a 20 h.

21C1.—Digueu quins són els triangles que poden ser dividits per una recta en dos triangles semblants.

21C2.—La suma de dos nombres reals és igual a la suma dels seus quadrats. Digueu:

- a) El valor que pot tenir aquesta suma.
- b) Els valors que poden tenir cada un dels nombres.
- c) Si els dos nombres poden ser iguals.
- d) El màxim de la diferència d'aquests dos nombres.

21C3.—Resoleu l'equació

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Segona sessió. 19 de Gener de 1985, de 9 h a 13 h.

21C4.—Demostreu que tot triangle pot subdividir-se en triangles acutangles.

21C5.—Tres nombres diferents estan en progressió aritmètica i els seus quadrats estan en progressió geomètrica. Calculeu la raó de la progressió geomètrica.

21C6.—Un hostel té infinites portes numerades amb els números $1, 2, 3, \dots$, i estan totes tancades. En aquest hostel hi ha infinits hostes que estan numerats també $1, 2, 3, \dots$, i tots són a passejar. Quan l'hoste número n torna a l'hostal obre totes les portes múltiples de n que troba tancades i tanca totes les portes múltiples de n que troba obertes. Digueu com estaran les portes quan hagin arribat tots els hostes.

Problemes de la XXI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1984-85

Primera sessió. Febrer de 1985.

21E1.—Sigui $\mathcal{P}$ el conjunt dels punts del pla i $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ una aplicació que compleix les tres condicions següents:

- a) f és bijectiva.
 - b) Per cada recta r del pla, $f(r)$ és una recta.
 - c) Per cada recta r , la recta $f(r)$ és paral·lela o coincident amb r .
- Digueu quines possibles transformacions poden ser f .

21E2.—Sigui $\mathbb{Z}$ el conjunt dels enters i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el conjunt de parells ordenats d'enters. La suma d'aquests parells es defineix

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

essent $(-a, -b)$ l'oposat de (a, b) .

Estudieu si existeix un subconjunt E de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que compleixi les condicions següents:

- a) La suma de dos parells de E també és a E .
- b) El parell $(0, 0)$ pertany a E .
- c) Si (a, b) no és $(0, 0)$, llavors o bé (a, b) pertany a E , o bé $(-a, -b)$ pertany a E , però no tots dos.

21E3.—Resoleu l'equació

$$\tan^2 2x + 2 \tan 2x \tan 3x - 1 = 0.$$

21E4.—Considerem tres nombres naturals a , b , c tals que la raó

$$\frac{a + b + c}{abc}$$

sigui l'invers d'un nombre k enter positiu. Es demana que demostreu:

- a) $a^3 + b^3 + c^3$ no és primer.
- b) Per a cada $k \in \mathbb{N}$ existeixen ternes de naturals a , b , c que compleixen les condicions.

Segona sessió. Febrer de 1985.

21E5.—Troheu l'equació de la circumferència que passa pels afixos de les solucions de l'equació

$$z^3 + (-1 + i)z^2 + (1 - i)z + i = 0.$$

21E6.—Es consideren les semirectes no alineades Ox , Oy . Pel punt $A \in Ox$ es tracen parells de rectes r_1 , r_2 , antiparal·leles respecte a l'angle xOy ; siguin M , N les interseccions de r_1 amb Oy i de r_2 amb Ox , respectivament. Sigui P el punt d'intersecció de les bisectrius dels angles AMy , ANy . Trobeu el lloc geomètric de P en variar A .

21E7.—Donada l'equació $x^5 - px - 1 = 0$, estudeu el valor de p que fa possible que existeixin dues solucions de l'equació, x_1 , x_2 , que a la vegada siguin solucions de $x^2 - ax + b = 0$, amb a , b enters.

21E8.—Direm que una matriu quadrada és de *suma constant* si la suma dels elements de cada fila, de cada columna, i de cada diagonal, són valors iguals. Anàlogament, una matriu quadrada és de *producte constant* si són iguals els productes dels elements de cada fila, de cada columna i de cada diagonal. Determineu les matrius quadrades d'ordre 3 sobre $\mathbb{R}$ que són, a la vegada, de suma i producte constants.

CURS 1985-86

Problemes de la XXII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1985-86

Primera sessió. 29 de Novembre de 1985, de 16 h a 20 h.

22C1.—Siguin A i B dos subconjunts del conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ que siguin una partició, és a dir, tals que $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \mathbb{N}$.

a) Demostreu que existeix un nombre natural m tal que $m + 5$ o $m + 6$ pertany al mateix subconjunt que m .

b) Demostreu que existeixen infinits nombres que compleixen la propietat anterior.

22C2.—Tres punts A , B , C s'uneixen per segments. Sobre la meitat del segment AB es construeix un quadrat, sobre el segment BC un altre quadrat, i sobre el segment CA un rectangle de base CA i altura 4 cm. L'àrea del rectangle supera en 20 cm^2 la suma de les àrees dels dos quadrats. Calculeu l'àrea del rectangle.

22C3.—Calculeu la suma dels quadrats de les distàncies entre els afixos dels nombres complexos que són solucions de l'equació

$$z^{1985} - 1 = 0.$$

22C4.—Trobeu el polinomi $p(x)$ de grau mínim tal que $p(x) + 1$ sigui divisible per $(x - 1)^4$ i $p(x) - 1$ sigui divisible per $(x + 1)^4$.

Segona sessió. 30 de Novembre de 1985, de 9 h a 13 h.

22C5.—Ordeneu de més gran a més petit els nombres

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

22C6.—A un ball hi ha vuit nois i vuit noies que estan asseguts alternativament en fila. De quantes maneres es poden formar cinc parelles de ball si cada parella ha d'estar formada per un noi i una noia asseguts un al costat de l'altre.

22C7.—Donats dos nombres naturals p i q primers entre ells, calculeu les sumes

$$\sum_{k=1}^{q-1} D\left(\frac{kp}{q}\right) \quad \text{i} \quad \sum_{h=1}^{p-1} D\left(\frac{hq}{p}\right),$$

on $D(a)$ indica la part decimal del nombre a .

22C8.—Calculeu els nombre naturals p i q més petits tals que $1/p$ i $1/q$ siguin dos decimals periòdics purs de períodes A i B , sabent que aquests períodes tenen el mateix nombre de xifres i el seu màxim comú divisor és 10989.

Problemes de la XXII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1985-86

Primera sessió. Febrer de 1986.

22E1.—Indicarem per $[x], \{x\}$ les parts entera i decimal del nombre real x . Definim una distància entre els nombres reals x i y

$$d(x, y) = \sqrt{([x] - [y])^2 + (\{x\} - \{y\})^2}.$$

Determineu (com a unió d'interval·ls) el conjunt dels nombres reals que *disten* del nombre $3/2$ menys que $202/100$.

22E2.—Un segment d divideix el segment s si existeix un natural n tal que

$$nd = d + d + \cdots + d = s.$$

a) Demostreu que si el segment d divideix els segments s i s' amb $s < s'$, llavors divideix el segment diferència $s' - s$.

b) Demostreu que cap segment divideix el costat s i la diagonal s' d'un pentàgon regular (raoneu sobre el pentàgon regular format per les diagonals del pentàgon donat, i no feu càlculs numèrics).

22E3.—Trobeu els valors de $n \in \mathbb{N}$ tals que $5^n + 3$ és una potència de 2 d'exponent natural.

Segona sessió. Febrer de 1986.

22E4.—Indiquem per $m(a, b)$ la mitjana aritmètica dels nombres reals positius a i b . Donada una funció real positiva g que té la primera i la segona derivada positives, definim la mitjana $\mu(a, b)$ relativa a la funció g mitjançant

$$2g(\mu(a, b)) = g(a) + g(b).$$

Digueu raonadament quina de les dues mitjanes m i μ és més gran.

22E5.—Considerem la corba Γ definida per l'equació $y^2 = x^3 + bx + b^2$, on la constant b és un nombre racional no nul. Inscriviu a la corba Γ un triangle tal que les coordenades dels vèrtexs siguin racionals.

22E6.—Calculeu

$$\prod_{k=1}^{14} \cos\left(\frac{k\pi}{15}\right).$$

CURS 1986-87

Problemes de la XXIII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1986-87

Primera sessió. 22 de Novembre de 1986.

23C1.—Elevant $3 + \sqrt{5}$ a la n -èsima potència s'obté un nombre de la forma $a + b\sqrt{5}$ amb a i b enters. Demostreu que

$$0 < a - b\sqrt{5} < 1.$$

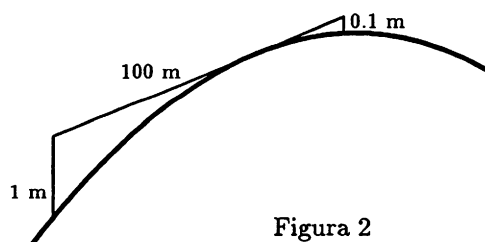
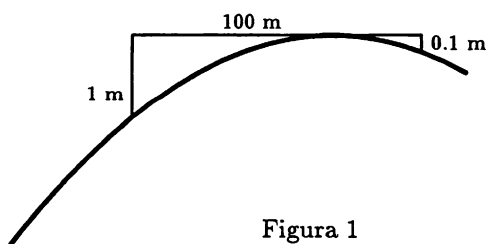
23C2.—Determineu els valors de a que fan que la successió $a_1 = a$, $a_2 = a + a_1^2$, $a_3 = a + a_2^2$, $\dots$, $a_n = a + a_{n-1}^2$, sigui creixent.

23C3.—En un triangle ABC de costats a , b , c , siguin m_a , m_b , m_c les mitjanes que passen, respectivament, pels vèrtexs A , B , C . Se sap que $b/a = \sqrt{17/5}$ i que $m_c = 2m_b$. Calculeu l'angle que formen aquestes dues mitjanes i les relacions c/a i c/b .

23C4.—Els canvis de rasant de les autopistes es fan segons un perfil parabòlic $y = -ax^2$, amb $a > 0$.

a) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada amb visual tangent al punt més alt vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 1).

b) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada situat a qualsevol lloc vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 2).



Segona sessió. 23 de Novembre de 1986.

23C5.—Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = x[1/x]$ i representeu gràficament la seva restricció al conjunt $(-\infty, -1/4] \cup [1/4, \infty)$, si $[x]$ indica la funció *part entera* de x .

23C6.—Digueu si es pot saber la data de naixement d'una persona sabent que ha nascut al segle XX, que la diferència entre l'any de naixement i 1900, més 100 vegades la suma del número del mes multiplicada per 40 i el número del dia és 13442.

23C7.—Un tren té 88 m de longitud i un altre 92 m. Quan circulen en direccions oposades tarden 7.5 s a creuar-se, i quan circulen en la mateixa direcció en tarden 45. Trobeu la velocitat dels dos trens.

23C8.—Trobeu dos nombre complexos α i β tals que els afixos dels nombres α , β , α/β i β/α siguin els vèrtexs d'un quadrat de diagonals α , β/α i β , α/β .

Problemes de la XXIII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1986-87

Primera sessió. Febrer de 1987.

23E1.—Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle no isòsceles. Es donen tres cercles concèntrics de radis a , b i c .

a) Diguen quin és el nombre de triangles equilàters d'àrees diferents que es poden construir, de manera que les rectes que contenen els costats siguin cada una tangent a un dels cercles.

b) Trobeu les superfícies d'aquests triangles.

23E2.—Demostreu que per tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}n^3}.$$

23E3.—Un triangle donat T es descompon en triangles $T_1, T_2, \dots, T_n$ de manera que:

a) Cap parell de triangles T_i té punts interiors en comú.

b) La unió dels triangles T_i és T .

c) Tot segment que és costat d'algun triangle T_i , o bé és costat d'un altre triangle T_j , o bé es costat del triangle T .

Siguin s el nombre total de costats (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a dos triangles), i v el nombre total de vèrtexs (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a diversos triangles).

Demostreu que si n és senar, existeixen diverses descomposicions d'aquesta mena, i totes tenen el mateix nombre v de vèrtexs i el mateix nombre s de costats. Expressen v i s en funció de n . Demostreu també que si n és parell no existeix cap descomposició.

Segona sessió. Febrer de 1987.

23E4.—Si a i b són dos nombres reals diferents, resol·leu el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\(ax + by)^2 &\leq a^2x + b^2y.\end{aligned}$$

Resol·leu també el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\(ax + by)^4 &\leq a^4x + b^4y.\end{aligned}$$

23E5.—En un triangle isòsceles ABC tenim punts D i E respectivament sobre AB i AC . Coneixem la mesura dels angles indicats a continuació: $ABE = 20^\circ$, $ECD = 50^\circ$, $ACD = 30^\circ$ i $DCB = 60^\circ$. Trobeu el valor de l'angle EDC .

23E6.—Per cada nombre natural n considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel c_n i només una a l'interval $(0, 1)$.

b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Problemes de la XXIV Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1987-88

Primera sessió. 11 de Desembre de 1987, de 16 h a 20 h.

24C1.—Determineu les potències de $(1+i)$ que són interiors a la corona circular determinada per les circumferències de centre $O = (0,0)$ i radis respectius 1000 i 10000.

24C2.—Busqueu els nombres primers de la forma $n^4 + 4$, on n és un nombre enter positiu.

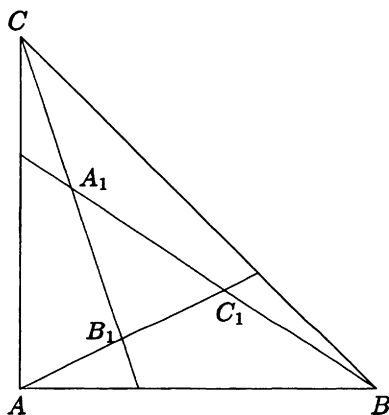
24C3.—Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $x p(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre una de sola.

24C4.—Donat un triangle rectangle isòsceles ABC , dividim cada un dels seus costats en tres parts iguals i tracem les rectes de la figura, que determinen un triangle $A_1B_1C_1$.

Determineu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$ en funció de l'àrea del triangle ABC .

Què passa si el triangle rectangle ABC no és isòsceles?

Què passa si el triangle ABC és un triangle qualsevol?



Segona sessió. 12 de Desembre de 1987, de 9 h a 13 h.

24C5.—Demostreu que si dos nombre enters són de la mateixa paritat (tots dos parells o tots dos senars), la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.

24C6.—Demostreu que l'equació

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c$$

només admet les solucions enteres $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

24C7.—Per un punt de la vora d'un quadrat es tracen dues rectes que divideixen el quadrat en tres trossos de la mateixa àrea. Calculeu l'angle d'aquestes rectes en funció dels punts de la vora.

24C8.—(a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de la funció

$$F(t) = \frac{\ln t}{t}.$$

(b) Comproveu que si $k \geq 3$ és enter, l'equació

$$(\ln x)^k = x$$

té exactament dues solucions més grans que e , diguem r_k i s_k , $r_k < s_k$, i que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = e \quad \text{i} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty.$$

Indicació: En la resolució de l'apartat (b) tingueu en compte l'apartat (a).

Problemes de la XXIV Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1987-88

Primera sessió. Febrer de 1988.

24E1.—Sigui (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, una successió de nombres enters tal que

$$x_1 = 1,$$

$$x_{n+1} > x_n, \text{ per } n \geq 1,$$

$$x_{n+1} \leq 2n, \text{ per } n \geq 1.$$

Demostreu que per tot enter natural k existeixen dos termes de la successió x_r i x_s tals que $x_r - x_s = k$.

24E2.—Sobre una circumferència s'eligeixen $n > 3$ punts i es numeren de 1 a n en qualsevol ordre. Direm que dos punts no consecutius a i b estan relacionats si en un dels dos arcs d'extremes a i b , tots els punts estan marcats amb números de valor menor que els de a i b .

Demostreu que el nombre de parells de punts relacionats és exactament $n - 3$.

24E3.—Demostreu que els binomis $25x + 31y$ i $3x + 7y$ són múltiples de 41 pels mateixos valors de x i y .

Segona sessió. Febrer de 1988.

24E4.—S'atribueix al matemàtic renaixentista Leonardo da Pisa (més conegut com Fibonacci) la successió definida de la manera següent

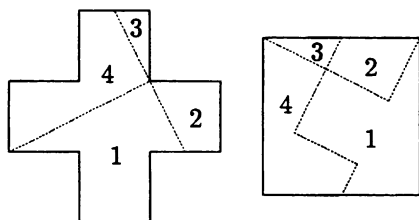
$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} \text{ per } i > 2.$$

Expresseu a_{2n} en funció només dels tres termes a_{n-1} , a_n , a_{n+1} .

24E5.—És molt conegut el *puzzle* consistent a descompondre la creu grega de l'esquerra de la figura en quatre parts amb les quals compondre un quadrat. Una solució habitual és la de la figura de la dreta. Demostreu que hi ha una infinitat de solucions diferents.



Hi ha alguna solució que doni lloc a quatre parts iguals?

24E6.—Calculeu, per qualsevol valor del paràmetre enter t , solucions enteres x , y de l'equació

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39).$$

CURS 1988-89

Problemes de la XXV Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1988-89

Primera sessió. 16 de Desembre de 1988, de 16 h a 20 h.

25C1.—Demostreu que si n és un enter positiu i p és primer, aleshores $n^p - n$ és múltiple de p .

25C2.—Dos mòbils es desplacen amb velocitat constant al llarg d'un circuit tancat. Si surten simultàniament d'un mateix punt en el mateix sentit, tornen a coincidir al cap de 100 s i el més ràpid ha de menester 10 s menys que l'altre per a fer una volta completa.

Quant de temps tardaran a creuar-se si surten simultàniament del mateix punt en sentits oposats?

25C3.—Els extrems A i B d'un segment es mouen respectivament sobre dues rectes r i s que són perpendiculars. Descriviu la corba que recorre el punt M del segment tal que MA és la meitat de MB .

25C4.—La societat *Peces de Ferro S.A.* té nou accionistes que han de triar en Joan o en Pere com a President. És sabut que sis d'ells votaran en Joan i els altres tres en Pere, i que en el moment d'emetre el vot, cada un ho farà públicament en veu alta.

Determineu la probabilitat que en Joan vagi sempre per davant en les votacions.

Segona sessió. 17 de Desembre de 1988, de 9 h a 13 h.

25C5.—Considerem un conjunt $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'un nombre finit n de nombres reals estrictament positius. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_n x_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1 x_2} \leq n - 1.$$

25C6.—Si α, β, γ són tres nombres complexos tals que els seus afixos determinen un triangle equilàter, demostreu que es compleix la igualtat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

25C7.—Demostreu, per cada enter positiu n , les desigualtats

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Si $[x]$ representa la part entera del nombre x , determineu el valor de

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} \right].$$

25C8.—Descriviu totes les successions (a_n) de nombres reals tals que

$$|a_n - a_m| \leq e^{-(n+m)}.$$

Problemes de la XXV Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1988-89

Primera sessió. Febrer de 1989.

25E1.—El programa d'una assignatura consta de n preguntes; l'examen consisteix en la resposta d'una pregunta triada a l'atzar. Un alumne només se sap una pregunta, però pot repetir l'examen n vegades. Expresseu, en funció de n , la probabilitat p_n que l'alumne aprovi l'examen. Digueu si p_n és creixent o decreixent quan n augmenta. Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

Calculeu la fita inferior màxima de les probabilitats p_n .

25E2.—Els punt A' , B' , C' dels costats BC , CA , AB d'un triangle ABC compleixen

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = k.$$

Les rectes AA' , BB' , CC' formen un triangle $A_1B_1C_1$. Donats k i l'àrea S del triangle ABC , calculeu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$.

25E3.—Demostreu que

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} < \frac{1}{10}.$$

Segona sessió. Febrer de 1989.

25E4.—Demostreu que el nombre 1989 i totes les seves potències enteres 1989^n es poden escriure com a suma de dos quadrats de nombres enters positius, i com a mínim de dues formes diferents.

25E5.—Sigui $\mathcal{D}$ el conjunt dels nombres complexos que es poden escriure de la forma $a + b\sqrt{-13}$, amb a, b enters. El nombre $14 = 14 + 0\sqrt{-13}$ es pot escriure com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$: $14 = 2 \cdot 7$. Expresseu 14 com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$ de totes les maneres possibles.

25E6.—Demostreu que donats *set* nombres reals qualssevol, se'n poden triar dos, diguem a i b , de manera que

$$\sqrt{3} |a - b| < |1 + ab|.$$

Doneu un exemple de *sis* nombres reals que no compleixin aquesta propietat.

CURS 1989-90

Problemes de la XXVI Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1989-90

Primera sessió. 16 de Febrer de 1990, de 16 h a 20 h.

26C1.—Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle i H l'ortocentre. Demostreu la igualtat

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}.$$

26C2.—Demostreu que si les longituds a, b, c dels costats d'un triangle compleixen $a < b < c$, aleshores l'angle C oposat al costat c compleix $\cos C < 1/2$.

26C3.—Sigui $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

- a) Demostreu que per a tot nombre natural n , el nombre $A_{n+3} - A_n$ és divisible per 7.
- b) Calculeu el residu de dividir A_{1990} per 7.

26C4.—Donada la corba

$$y = x + \frac{1}{2x^2},$$

- a) Calculeu l'àrea $S(t)$ limitada per la corba, la seva asímptota inclinada i les rectes $x = 1$ i $x = t$ ($t > 1$).
- b) Calculeu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t).$$

Segona sessió. 17 de Febrer de 1990, de 9 h a 13 h.

26C5.—Resoleu a l'interval $[0, 2\pi]$ la inequació

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x > 0.$$

26C6.—Un triangle rectangle T_1 té els costats en progressió geomètrica i un altre triangle rectangle T_2 els té en progressió aritmètica. Un costat del triangle T_1 és igual a un costat del triangle T_2 . Calculeu el valor màxim i el valor mínim de

$$\frac{\text{àrea } T_1}{\text{àrea } T_2}.$$

26C7.—Determineu els nombres complexos z tals que els afixos dels nombres

$$z^{1989}, z^{1990}, z^{1991}$$

siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles amb l'angle recte en el punt z^{1990} .

26C8.—Esbrineu si és possible tenir un pla P , una esfera E i un tetràedre regular T tals que els plans paral·lels a P o bé no tallin ni a l'esfera E ni al tetràedre T , o bé els tallin en figures de la mateixa àrea.

Estudieu la mateixa qüestió si el tetràedre no és regular.

Problemes de la XXVI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1989-90

Primera sessió. 16 de Març de 1990.

26E1.—Siguin x i y dos nombres reals positius. Proveu que l'expressió

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

es pot escriure en la forma

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$$

i compareu els nombres

$$L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}}.$$

26E2.—Cada punt d'un pla està pintat d'un color elegit entre tres de diferents. Es pregunta si existeixen necessàriament dos punts d'aquest pla que distin 1 cm i que estiguin pintats del mateix color.

26E3.—S'anomena part entera d'un nombre real a (i s'escriu $[a]$), el nombre enter més gran que sigui menor o igual que a . Si n és un nombre natural, demostreu que la part entera de $(4 + \sqrt{11})^n$ és un nombre senar.

Segona sessió. 17 de Març de 1990.

26E4.—Demostreu que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

és independent del valor de a , per tot valor real $a \geq -3/4$, i trobeu-ne el valor.

26E5.—Tres punts A' , B' , C' estan situats, respectivament, sobre els costats BC , CA i AB d'un triangle donat ABC d'àrea S , de manera que

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = p,$$

essent p un paràmetre variable, $0 < p < 1$. Determineu

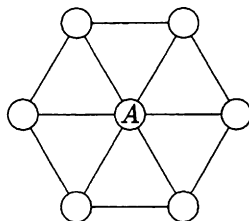
- 1) L'àrea del triangle $A'B'C'$ en funció de p .
- 2) El valor de p que fa mínima l'àrea anterior.
- 3) El lloc geomètric dels punts P d'intersecció de les paral·leles traçades per A' i C' , respectivament als costats AB i AC , quan p varia de 0 a 1.

26E6.—Es consideren n punts del pla de forma que no hi hagi dues parelles equidistants. Per cada punt es traça el segment que l'uneix al més proper. Demostreu que cap punt està unit a més de cinc punts.

Problemes de la XXVII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1990-91

Primera sessió. 14 de Desembre de 1990, de 16 h a 20 h.

27C1.—La figura adjunta representa un entramat de camins per on pot moure's una tortuga, la qual, a cada cruïlla, escull a l'atzar un qualsevol dels camins que pot seguir. Si deixem la tortuga lliure en el punt A , calculeu la probabilitat que torni a passar pel punt A en menys de n moviments.



27C2.—Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6, per tal que el seu producte acabi en 36.

27C3.—Siguin r i R dos rectangles d'àrea unitat, tals que el perímetre de R és doble del perímetre de r . Siguin d i D les longituds de les diagonals de r i R .

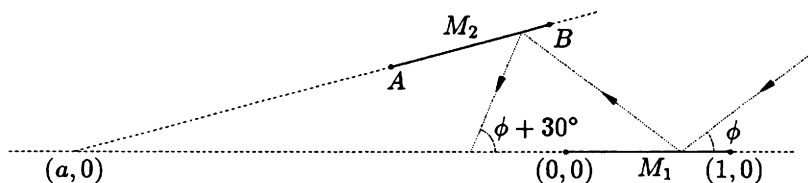
a) Demostreu que $2 < D/d \leq \sqrt{7}$.

b) Si $D = d\sqrt{5}$, determineu les longituds dels costats dels dos rectangles.

27C4.—Prenem un sistema rectangular de coordenades al pla. Tenim un mirall M_1 unidimensional posat cara amunt sobre el segment d'extremes $(0,0)$ i $(1,0)$. Sobre la recta que passa per $(a,0)$ amb $a < 0$ i que té pendent $m > 0$ posem un mirall M_2 d'extremes A i B mirant cap avall. Determineu a , m i els punts A i B per tal que es compleixi:

a) Tot raig que arriba a M_1 amb un angle ϕ respecte de la direcció de les x positives, $30^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$, és reflectit cap a M_2 , es reflecteix a M_2 i no torna a trobar M_1 . L'angle entre la direcció de les x positives i el raig que arriba de M_2 és $\phi + 30^\circ$.

b) La longitud de M_2 és mínima respecte a tots els possibles miralls que compleixen la condició anterior.



Segona sessió. 15 de Desembre de 1990, de 9 h a 13 h.

27C5.—Trobeu els nombres de quatre xifres que són iguals al quadrat de la suma del nombre format per les dues primers xifres i el format per les dues darreres xifres.

27C6.—Considereu un triangle equilàter inscrit en una circumferència de radi 1. Li apliqueu una rotació d'angle ϕ de centre el centre de la circumferència. Calculeu l'àrea comuna als dos triangles i el valor de l'angle ϕ que fa que l'àrea comuna sigui mínima.

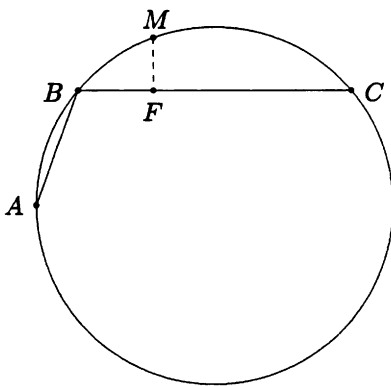
27C7.—Demostreu que tot nombre de la forma $2/n$, amb n senar, es pot posar com a suma de dues fraccions unitàries (és a dir, de fraccions de numerador 1.)

Deduïu-ne que tota fracció m/n , amb n senar, admet una descomposició en suma de fraccions unitàries diferents. Comproveu també que si m/n admet una descomposició en suma de r fraccions unitàries diferents, n'admet una altra en suma de s fraccions unitàries, per tot $s > r$.

27C8.—Siguin AB i BC dues cordes d'un cercle ($AB < BC$) i sigui M el punt mitjà de l'arc ABC . Siguí F el peu de la perpendicular des de M a la corda BC .

a) Proveu que F és el punt mitjà de la corda trencada, és a dir, $AB + BF = FC$.

b) Useu el punt anterior per veure que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.



Problemes de la XXVII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1990-91

Primera sessió. 15 de febrer de 1991.

27E1.—Al pla, on s'ha pres un sistema de referència ortonormal, es consideren tots els punts (m, n) tals que les seves coordenades són nombres enters. Suposem que s'hagin traçat tots els segments que uneixen parells qualssevol d'aquests punts i que tenen longitud entera. Proveu que no hi ha dos segments d'aquests que formin un angle de 45° .

Fem el mateix amb els punts (m, n, k) de l'espai. Hi haurà algun parell de segments que formin un angle de 45° ?

27E2.—Siguin a i b enters diferents de 0, 1 i -1 i considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \dots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \dots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \dots & a^3+b^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \dots & a^n+b^m \end{pmatrix}.$$

Determineu un subconjunt S de files d'aquesta matriu, el més petit possible, tal que qualsevol altra fila es pugui expressar com a suma de les files de S multiplicades per nombres enters apropiats (és a dir, com a combinació lineal amb coeficients enters de les files de S .) Expliciteu aquestes combinacions lineals.

27E3.—Suposem que l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ amb $r \neq 0$, admet tres arrels reals i positives. Determineu la relació que hi ha entre els nombres reals p , q i r per tal que les tres arrels puguin ser les longituds dels costats d'un triangle.

Segona sessió. 16 de febrer de 1991.

27E4.—Siguin A' , B' i C' els punts de tangència dels costats BC , CA i AB d'un triangle amb la seva circumferència incrita. Sigui D el punt d'intersecció de $C'A'$ amb la bisectriu de l'angle del vèrtex A . Calculeu el valor de l'angle $\widehat{ADC}$.

27E5.—Donat un nombre natural n , indiquem per $s(n)$ la suma de les xifres del nombre n , expressat en el sistema de numeració binari, és a dir, el nombre de xifres 1 que té. Determineu, per a tot nombre natural k

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \cdots + s(2^k).$$

27E6.—Calculeu la part entera de

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

Problemes de la XXVIII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1991-92

Primera sessió. 22 de Novembre de 1991, de 16 h a 20 h.

28C1.—Demostreu que el nombre que escrit en base n , $n \geq 8$ és 1367631, és un cub perfecte. En particular, calculeu l'arrel cúbica d'aquest nombre en base 10 i en base 1991.

28C2.—Sigui S el conjunt de les rectes que uneixen un punt del conjunt

$$A = \left\{ \left(0, \frac{1}{a} \right) \mid a \in \mathbb{N} \right\}$$

i un punt del conjunt

$$B = \{ (b+1, 0) \mid b \in \mathbb{N} \}.$$

Demostreu que un nombre natural m és compost si i només si el punt $M = (m, -1)$ està sobre una recta del conjunt S .

Determineu també el nombre de rectes del conjunt S que passen per un punt $M = (m, -1)$ en funció del nombre natural m .

28C3.—L'abscissa d'un punt que es mou sobre la part positiva de l'eix de les X ve donada per

$$x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^5}$$

on a és una constant positiva.

Quin és el mínim valor de a pel qual $x(t) \geq 24$ per a tot $t \geq 0$?

28C4.—Tenim dues circumferències S_1 , S_2 iguals, de radi R , i tangents. Considerem la tangent comuna r , paral·lela a la recta que uneix els centres de S_1 i S_2 .

Siguin C_1 , la circumferència tangent a r , S_1 i S_2 ; C_2 , la circumferència tangent a C_1 , S_1 i S_2 ; C_3 , la circumferència tangent a C_2 , S_1 i S_2 ; etc.

S'obté així una família de circumferències $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$. Demostreu que el diàmetre de la circumferència C_n és

$$d_n = \frac{R}{n(n+1)}.$$

Segona sessió. 23 de Novembre de 1991, de 9 h a 13 h.

28C5.—Per cada nombre natural n escrivim

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n \sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{i} \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

- a) Demostreu que a_n i b_n són senars per tot $n \in \mathbb{N}$.
- b) Demostreu que b_n és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets

$$\frac{a_n + 1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{a_n - 1}{2}.$$

28C6.—Siguin z_1, z_2, z_3 i z_4 nombres complexos de igual mòdul;

- a) si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests tres nombres complexos?
- b) si $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests quatre nombres complexos ?

28C7.—Sigui $p(n)$ el nombre de factors primers del nombre natural n . Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

28C8.—Sigui ABC un triangle qualsevol. Exteriorment a ell es construeixen dos quadrats $BAEP$ i $ACRD$ de costats AB i AC respectivament. Siguin M i N els punts mitjans de BC i ED . Demostreu que AM és perpendicular a ED i que AN és perpendicular a BC .

Problemes de la XXVIII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1991-92

Primera sessió. 14 de Febrer de 1992.

28E1.—Un nombre N , múltiple de 83, és tal que el seu quadrat té 63 divisors. Trobeu N , sabent que és el nombre més petit que compleix les condicions anteriors.

28E2.—Donades dues circumferències exteriors de radis r i r' ($r \neq r'$), es demana de dibuixar, raonadament, una recta paral·lela a una direcció donada, de tal manera que determini sobre les dues circumferències dues cordes tals que la suma de llurs longituds sigui igual a una longitud donada ℓ .

28E3.—Proveu que si a , b , c i d són nombres enters no negatius, i és

$$(a + b)^2 + 2a + b = (c + d)^2 + 2c + d, \quad (*)$$

necessàriament ha de ser $a = c$ i $b = d$.

Proveu la mateixa conclusió si, en lloc de (*) es compleix

$$(a + b)^2 + 3a + b = (c + d)^2 + 3c + d.$$

Vegeu que, en canvi, existeixen nombres enters no negatius $a \neq c$, $b \neq d$, tals que

$$(a + b)^2 + 4a + b = (c + d)^2 + 4c + d.$$

Segona sessió. 15 de Febrer de 1992.

28E4.—Sigui la successió (progressió aritmètica)

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

Demostreu que en aquesta successió hi ha infinits nombres primers.

28E5.—Dibuixat el triangle de vèrtexs A , B , C , es demana de determinar gràficament el punt P tal que

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}.$$

Expresseu una funció trigonomètrica d'aquest angle $\widehat{PAB}$ en funció de les funcions trigonomètriques dels angles A , B i C .

28E6.—Donats un nombre natural $n > 0$ i un nombre complex $z = x + iy$ de mòdul unitat, $x^2 + y^2 = 1$, es pot complir o no la igualtat

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = 2^{n-1} \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Fixat n designarem per $S(n)$ el subconjunt de complexos de mòdul unitat pels quals es compleix la igualtat donada. Es demana

- Calculeu raonadament $S(n)$, per $n = 2, 3, 4, 5$.
- Fiteu superiorment el nombre d'elements de $S(n)$ en funció de n , per $n > 5$.

Problemes de la XXIX Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1992-93

Primera sessió. 11 de Desembre de 1992, de 16 h a 18 h 30 m.

29C1.—Demostreu que el nombre combinatori

$$\binom{1992}{1492}$$

no és múltiple de 500.

29C2.—Proveu que si els nombres

$$\sin(b + c - a), \quad \sin(c + a - b) \quad \text{i} \quad \sin(a + b - c)$$

estan en progressió aritmètica, llavors també ho estan els nombres

$$\tan a, \quad \tan b \quad \text{i} \quad \tan c.$$

29C3.—En un cercle de centre O i radi 1 tracem una corda i construïm seguidament el semicercle que té com a diàmetre aquesta corda i no està contingut en el cercle inicial. Sigui P el punt d'aquest semicercle que està més lluny del punt O . Quina longitud ha de tenir la corda per tal que la distància OP sigui màxima?

29C4.—Calculeu els límits

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{(n-1)n}).$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{(n-1)n^2}).$$

29C5.—Sobre una recta horitzontal construïm triangles equilàters de forma que les respectives bases són segments adjacents de longituds 1, 3, 5, 7, ... Demostreu que els vèrtexs superiors dels triangles estan sobre una paràbola.

29C6.—Un rectangle es pot descompondre en 9 quadrats de costats 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 i 18. Calculeu els costats del rectangle.

29C7.—El joc de daus americà es juga de la manera següent: el jugador va tirant successivament els daus fins que perd o guanya.

A la primera tirada guanya si la suma dels punts dels dos daus és 7 o bé 11, i perd si la suma de punts és 2, 3 o 12. Altrament anomenarem *el seu valor* la suma de punts que ha tret en la primera tirada.

A partir d'aquí tirarà els dos daus fins que tregui un 7, i llavors perdrà, o bé que tregui novament *el seu valor* i llavors guanyarà.

Calculeu la probabilitat que té un jugador de guanyar en aquest joc.

29C8.—Sigui $A = 66^{66}$. Sigui B la suma de les xifres de A , i C la suma de les xifres de B . Calculeu la suma de les xifres de C .

Problemes de la XXIX Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1992-93

Primera sessió. 26 de Febrer de 1993.

29E1.—En una reunió hi ha 201 persones de 5 nacionalitats diferents. Se sap que, a cada grup de 6, com a mínim 2 tenen la mateixa edat. Demostreu que hi ha al menys 5 persones del mateix país, de la mateixa edat i del mateix sexe.

29E2.—Escrit el triangle aritmètic

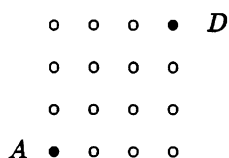
0	1	2	3	4	...	1991	1992	1993
	1	3	5	7	...		3983	3985
		4	8	12	...			7968
			...	...	...			

on cada nombre és igual a la suma dels dos que té al damunt (és evident que cada fila té un nombre menys que la fila anterior, i per tant, la darrera està formada per un únic nombre), raoneu el fet que l'últim nombre sigui múltiple de 1993.

29E3.—Justifiqueu raonadament que a qualsevol triangle, el diàmetre de la circumferència inscrita no és més gran que el radi de la circumferència circumscrita.

29E4.—Demostreu que tot nombre primer p diferent de 2 i de 5 té infinits múltiples escrits només amb uns (és a dir, de la forma $111\dots 1$).

29E5.—Es donen 16 punts que formen una quadrícula com a la figura:



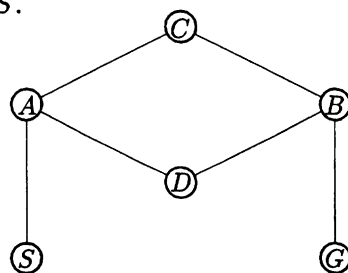
De tots ells, se n'han destacat dos: A i D . Es demana que fixeui, de totes les maneres possibles, dos altres punts B i C amb la condició que les 6 distàncies determinades pels quatre punts siguin totes diferents. En aquest conjunt de quaternes, s'ha d'estudiar:

- 1) Nombre de figures de 4 punts que existeixen amb les condicions de l'enunciat.
- 2) Figures que són geomètricament diferents, és a dir, no deduïbles una de l'altra per una transformació d'igualtat.

3) Si cada punt es designa per un parell d'enters (X_i, Y_i) , la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ estesa al sis parells AB, AC, AD, BC, BD, CD , és constant.

29E6.—Una màquina de joc d'un casino té una pantalla on s'ofereix un esquema com el de la figura. En començar el joc apareix una bola al punt S .

A cada impuls del jugador, la bola es mou a cada un dels cercles immediats, amb la mateixa probabilitat per a cada un d'ells. La partida acaba quan té lloc per primera vegada un dels dos esdeveniments següents: (1) La bola torna a S , i el jugador perd. (2) La bola arriba a G , i llavors el jugador guanya. Es demana la probabilitat que el jugador guanyi, i la duració mitjana de les partides.



Problemes de la XXX Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1993-94

Primera sessió. 14 de Gener de 1994, de 16 h a 20 h.

30C1.—Dues circumferències C_1 i C_2 es tallen en punts A i B . Es pren un punt M de C_1 , exterior a C_2 , i es tracen les rectes MA i MB . Anomenem A' i B' els punts (diferents de A i de B) en què aquestes rectes tallen respectivament la circumferència C_2 . Demostreu que la longitud del segment $A'B'$ no depèn de la posició de M .

30C2.—Demostreu que la funció

$$f(x) = 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

és constant en el conjunt dels nombres reals tals que $x \geq 1$.

30C3.—El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

30C4.—En una bossa hi ha n boles numerades amb números de 1 a n .

a) Si traiem tres boles d'aquesta bossa, totes alhora, calculeu la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius.

b) Si traiem m boles d'aquesta bossa, totes alhora, demostreu que la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius és

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Segona sessió. 15 de Gener de 1994, de 9 h a 13 h.

30C5.—Digueu quina relació hi ha d'haver entre les arestes d'un tetràedre per tal que les seves cares siguin triangles semblants no tots iguals.

30C6.—Una successió de terme general a_n compleix $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n > 2$. Se sap que la suma dels 1000 primers termes és 500, i que la suma dels 1000 següents és 2000. Calculeu la suma dels 1993 primers termes i el terme a_{1994} .

30C7.—Sigui $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters.

a) Comproveu que si m i n són nombres enters, llavors $P(m) - P(n)$ és divisible per $m - n$.

b) Demostreu que si hi ha tres nombres enters a , b i c tals que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$, llavors $P(x) \neq 3$ per tot x enter.

30C8.—Calculeu totes les arrels complexes de l'equació

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

Problemes de la XXX Olimpiáda Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1993-94

Primera sessió. 25 de Febrer de 1994.

30E1.—Demostreu que si entre els infinits termes d'una progressió aritmètica de nombres enters hi ha un quadrat perfecte, llavors infinits termes de la progressió són quadrats perfectes.

30E2.—Sigui $O.XYZ$ un triedre trirectangle de vèrtex O i arestes X , Y i Z . Sobre l'aresta Z es fixa un punt C tal que $OC = c$. Sobre X i Y es consideren, respectivament, punts variables P i Q de manera que $OP + OQ$ sigui una constant donada k . Per a cada parell de punts P i Q , els quatre punts O , C , P i Q determinen una esfera, el centre de la qual W , es projecta sobre el pla OXY . Raoneu quin és el lloc geomètric d'aquesta projecció. Raoneu també quin és el lloc geomètric de W .

30E3.—Una Oficina de Turisme vol fer una enquesta sobre el nombre de dies asolellats i de dies de pluja al llarg d'un any. Per tal de fer-ho, demana informació a sis regions, les quals li transmeten la informació de la taula següent:

<i>Regió</i>	<i>Sol o pluja</i>	<i>Inclassificable</i>
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encarregada de l'enquesta, que té dades més detallades, no és imparcial. S'adona que prescindint d'una de les regions, la observació dona un nombre de dies plujosos que és la tercera part del nombre de dies de sol. Digueu raonadament de quina regió ha de prescindir.

Segona sessió. 26 de Febrer de 1994.

30E4.—L'angle A d'un triangle isòsceles ABC mesura $2/5$ de recte, i els angles B i C són iguals. La bisectriu de l'angle C talla el costat oposat al punt D . Calculeu les mesures dels angles del triangle BCD . Expressen la mesura a del costat BC en funció de la mesura b del costat AC , sense que a l'expressió hi aparegui cap raó trigonomètrica.

30E5.—Amb 21 fitxes de dames, unes de blanques i unes de negres, es forma un rectangle 3×7 . Demostreu que sempre hi ha quatre fitxes del mateix color situades en els vèrtexs d'un rectangle.

30E6.—Un polígon convex de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'altre triangle contigu o del polígon donat. Demostreu que $m + n$ és parell. Coneguts m i n , trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden en aquest interior.

CURS 1994-95

Problemes de la XXXI Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1994-95

Primera sessió. 13 de Gener de 1995, de 16 h a 20 h.

31C1.—Donat un triangle isòsceles de base 2 i altura 2, trobeu les paràboles tangents als costats iguals del triangle isòsceles tals que l'àrea que tanquin amb la base del triangle sigui màxima i mínima.

31C2.—Sigui $N = abc_{(n)}$ un nombre escrit en el sistema de numeració de base n , on $0 \leq a, b, c \leq n-1$ i on a, b, c són diferents entre ells i de zero. Formeu els nombres en base n que s'obtenen permutant de totes les maneres possibles les xifres a, b, c . Demostreu que la suma d'aquests nombres és divisible per $111_{(n)}$. Generalitzeu l'enunciat del problema a nombres de p xifres escrits en base n .

31C3.—Donat un triangle ABC i un punt M sobre AC , busqueu un punt N en un dels altres costats de manera que el segment MN divideixi el triangle en dues parts que tinguin la mateixa àrea.

31C4.—Tenim dos daus perfectes normals. Volem canviar les puntuacions de cadascuna de les cares dels dos daus de manera que les probabilitats d'aconseguir els resultats 2 a 12, llançant-los simultàniament, sigui la mateixa que s'esdevindria usant els dos daus donats inicialment. A les noves puntuacions dels daus es permet la repetició d'una mateixa puntuació en dues cares, així com la utilització de puntuacions superiors al 6, però no s'accepta pas el 0. És possible de fer això?

Segona sessió. 14 de Gener de 1995, de 9 h a 13 h.

31C5.—Siguin $[a, b]$ i $[c, d]$ dos intervals tancats de $\mathbb{R}$. Siguin $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ nombres reals que compleixen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Proveu que si cadascun dels n^2 rectangles de $\mathbb{R}^2$

$$[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \quad (0 \leq i, j \leq n-1)$$

té un costat de longitud entera, llavors el rectangle gran $[a, b] \times [c, d]$ també té un costat de longitud entera.

31C6.—Siguin A, B i C els tres angles d'un triangle.

a) Demostreu que es compleix la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

b) Suposeu que tres arrels de l'equació polinòmica

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$

són $\tan A, \tan B$ i $\tan C$, on A, B i C són els tres angles d'un triangle. Busqueu la quarta arrel en funció solament dels coeficients p, q, r, s del polinomi.

31C7.—Busqueu una fórmula general que permeti conèixer còmodament les hores en les quals la busca horària d'un rellotge i la minutera formen un angle recte. Comproveu aquesta fórmula general per a les 3 i les 9 hores.

31C8.—Sigui $ABCD$ un rectangle, dividim el costat AB en p parts iguals i el costat AD en q parts iguals, amb p, q enters senars, i considerem la quadrícula resultant.

a) Calculeu el nombre de camins de longitud mínima per la quadrícula que van del vèrtex A al seu vèrtex oposat C .

b) Cadascun d'aquests camins tanca amb els costats AB i BC una certa àrea. Calculeu la suma d'aquestes àrees.

c) Si m és la mitjana aritmètica d'aquestes àrees, es demana quants camins tanquen aquesta àrea m .

Problemes de la XXXI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya, celebrada a Castelló), 1994-95

Primera sessió. 24 de febrer de 1995, de 16 h a 20 h.

31E1.—Es consideren conjunts A de cent nombres naturals diferents, que tinguin la propietat que si a , b , c són elements qualssevol (iguals o diferents) de A , existeix un triangle no obtusangle els costats del qual mesuren a , b i c unitats.

S'anomena $S(A)$ la suma dels perímetres considerats a la definició de A . Calculeu el valor mínim de $S(A)$.

31E2.—Retallem diversos cercles de paper (no necessàriament iguals) i els estenem sobre una taula de manera que n'hi hagi alguns de superposats (amb part interior comuna), però de tal forma que no hi hagi cap cercle dins d'un altre.

Proveu que és impossible engalzar les peces que resulten de retallar les parts no superposades i compondre amb elles cercles disjunts.

31E3.—Pel baricentre G d'un triangle ABC es traça una recta que talla el costat AB en P i el costat AC en Q . Demostreu que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

Segona sessió. 25 de febrer de 1995, de 10 h a 13 h.

31E4.—Trobeu les solucions enteres de l'equació

$$p(x + y) = xy$$

on p és un nombre primer.

31E5.—Demostreu que en cas que les equacions

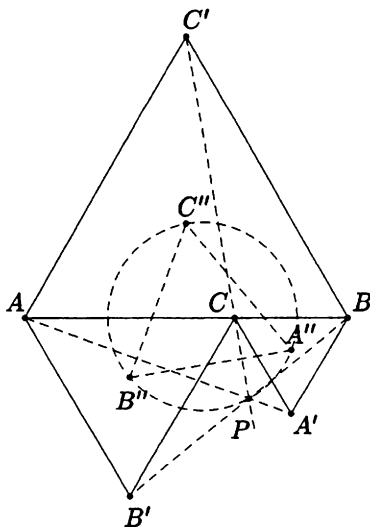
$$x^3 + mx - n = 0$$

$$nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$$

($n \neq 0$), tinguin una arrel comuna, la primera tindrà dues arrels iguals, i determineu llavors les arrels de les dues equacions en funció de n .

31E6.—A la figura, AB és un segment fix i C un punt variable dins d'ell. Es construeixen triangles equilàters ACB' i CBA' de costats AC i CB en un mateix semiplà definit per AB , i un altre triangle equilàter ABC' de costat AB en el semiplà oposat. Demostreu:

- Les rectes AA' , BB' i CC' són concurrents.
- Si anomenem P el punt comú a les tres rectes del punt a), trobeu el lloc geomètric de P quan C varia en el segment AB .
- Els centres A'' , B'' i C'' dels tres triangles formen un triangle equilàter.
- Els punts A'' , B'' , C'' i P són concíclics.



Problemes de la XXXII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1995-96

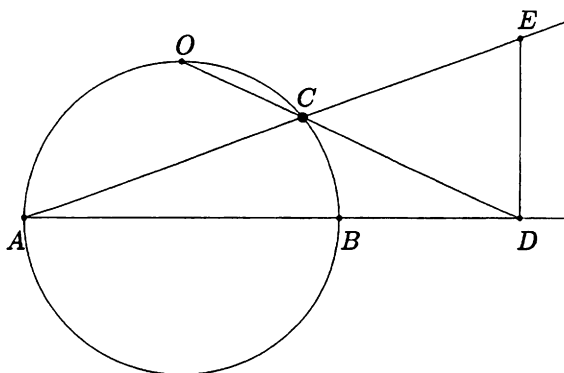
Primera sessió. 15 de Desembre de 1995, de 16 h a 20 h.

32C1.—Un cert professor de matemàtiques va escriure a la pissarra un polinomi $f(x)$ amb coeficients enters i va dir: “Si al polinomi substituïm x per l’edat del meu fill, que acaba de fer a anys, obtenim la igualtat $f(a) = a$. A més, $f(0) = p$ és un nombre primer més gran que a .” Quants anys té el fill del professor?

32C2.—Sigui n un nombre natural. Trobeu el nombre més gran k tal que en el conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$ poguem agafar un subconjunt A de k nombres que compleixi que si x, y, z són nombres qualssevol de A , sempre sigui $x + y \neq z$.

32C3.—Escollim un nombre natural n i demanem a r persones que escriguin un subconjunt de $\{1, 2, \dots, n\}$. Quina és la probabilitat que els r subconjunts obtinguts siguin disjunts dos a dos?

32C4.—Sigui AB el diàmetre d’una circumferència, O el punt mig d’un dels arcs que van de A a B , i C un punt qualsevol de l’arc OB . Dibuixem les rectes AC , OC , i sigui D la intersecció de OC amb AB . Sigui DE perpendicular a AD i E la seva intersecció amb AC . Demostreu que els segments BD i DE tenen la mateixa longitud.



Segona sessió. 16 de Desembre de 1995, de 9 h a 13 h.

32C5.—Calculeu un nombre de sis xifres sabent que passant-ne l'última al davant queda dividit per 3.

32C6.—Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k},$$

on n i k són nombres naturals, $n \geq k$.

32C7.—Demostreu que si un polígon inscrit en una circumferència de radi r té costats de longituds $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, es compleix

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \dots + \ell_n^2 \leq 9r^2.$$

Determineu per quins polígons hi ha igualtat.

32C8.—Donat un nombre natural n , sigui $p(n)$ el producte de les seves xifres. Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

Problemes de la XXXII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya, celebrada a Tarragona), 1995-96

Primera sessió. 22 de febrer de 1996, de 16 h a 20 h.

32E1.—Els nombres naturals a i b són tals que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

és un enter. Demostreu que el màxim comú divisor de a i b no és més gran que $\sqrt{a+b}$.

32E2.—Sigui G el baricentre del triangle ABC . Demostreu que si

$$AB + GC = AC + GB,$$

llavors el triangle és isòsceles.

32E3.—Siguin a , b , c tres nombres reals. Es consideren les funcions

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabent que

$$|f(-1)| \leq 1, \quad |f(0)| \leq 1, \quad \text{i} \quad |f(1)| \leq 1,$$

proveu que si $-1 \leq x \leq 1$, aleshores $|f(x)| \leq 5/4$ i $|g(x)| \leq 2$.

Segona sessió. 23 de febrer de 1996, de 10 h a 13 h.

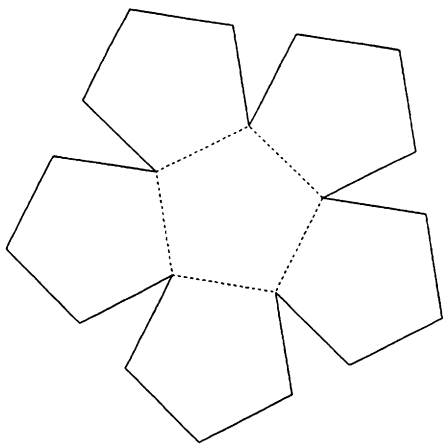
32E4.—Discutiu l'existència de solucions reals x de l'equació

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

segons els valors reals del paràmetre p , i resoleu-la en els casos que tingui solució.

32E5.—A *Port Aventura* hi ha 16 agents secrets. Cada un d'ells vigila algun dels seus col·legues. Se sap que si l'agent A vigila l'agent B , aleshores B no vigila A . Sabem també que 10 agents qualssevol poden ser numerats de manera que el primer vigila el segon, aquest vigila el tercer, ..., el desè vigila el primer. Demostreu que també es poden numerar d'aquesta manera 11 agents qualssevol.

32E6.—La figura adjunta es compon de sis pentàgons regulars de costat un metre. Es doblega per la línia de punts fins que coincideixen les arestes no puntejades que es tallen en un vèrtex. Quin volum d'aigua hi cap, al recipient així format?



CURS 1994-95

Problemes de la XXXIII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1996-97

Primera sessió. 13 de Desembre de 1996, de 16 h a 20 h.

33C1.—Amb dos filferros de 1996 cm de llarg cadascun, dos filferros de 1997 cm de llarg cadascun i dos filferros de 1998 cm de llarg cadascun, es construeix un tetràedre de manera que les sis arestes resulten ser tangents a una esfera. Raoneu en quina posició relativa hem situat les arestes.

33C2.—Un rellotger molt de la broma té a l'aparador de la seva botiga un rellotge amb les dues busques — la *minutera* i l'*horària* — exactament iguals. Una persona que s'hi fixi una mica, quasibé sempre pot deduir quina és la busca horària i quina la minutera, i deduir, doncs, quina hora és. Tanmateix, però, en alguns casos això no és possible. Si en aquests casos s'escull a l'atzar una busca con a horària i l'altra com a minutera, i l'elecció és incorrecta, es cometrà un error en la lectura de l'hora. La diferència més curta entre l'hora llegida i l'hora real no pot ser en cap cas superior a les 6 hores.

a) Descriviu les situacions en què no es pot saber quina hora és.

b) Estudieu quin és el màxim error que es pot arribar a cometre i a quines hores es produeix aquest error màxim.

33C3.—En una bossa hi ha n boles blanques numerades de 1 a n , n boles vermelles numerades de 1 a n , n boles blaves numerades de 1 a n i n boles grogues numerades de 1 a n , essent $n \geq 4$. Es treuen 4 boles d'aquesta bossa totes alhora. Esudieu, segons els valors de n , quins dels esdeveniments següents és més difícil que tingui lloc, és a dir, té una probabilitat més petita:

$A = \{\text{treure les quatre boles del mateix color}\}$

$B = \{\text{treure quatre boles amb números correlatius}\}$

$C = \{\text{treure tres boles d'un mateix número i l'altra no}\}.$

33C4.—Sigui C un con recte de radi r i altura h . Sigui V el vèrtex del con i AB un diàmetre de la base circular de centre O . Els plans $\mathcal{P}$ paral·lels a la generatriu VA del con que tallen la base circular segons cordes MN perpendiculars a AB , tallen la superfície cònica segons una paràbola. Trobeu la distància d de la corda MN al centre O per tal que l'àrea de la intersecció de $\mathcal{P}$ amb C sigui màxima.

33C5.—Al pla definim un sistema de coordenades rectangulars. Calculeu l'àrea del recinte solució del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} |\sqrt{3}y - x| \leq 2x \\ x^2 + y^2 \leq 2x. \end{cases}$$

33C6.—Busqueu els nombres complexos α tals que els afixos dels nombres α , α^2 , α^3 , α^4 siguin els vèrtexs d'un trapezi.

33C7.—Hi ha una fórmula que dona l'àrea A d'un triangle del pla que té els vèrtexs situats en punts de coordenades enteres com a funció lineal $A = aI + bC + dV$, on I representa el nombre de punts de coordenades enteres que són interiors al triangle; C el nombre dels que queden situats sobre els costats del triangle; i $V = 3$ és el nombre de vèrtexs de coordenades enteres. Deduïu-la, a partir de l'anàlisi d'alguns exemples, i demostreu-la.

33C8.—Anomenarem *polígon mixtilini* una regió tancada del pla limitada per costats que poden ser segments o arcs de circumferència. Els angles del polígon mixtilini es mesuren en graus i són, en cada vèrtex, els que determinen els costats (cas que siguin segments), o les tangents traçades pel vèrtex als costats que siguin arcs.

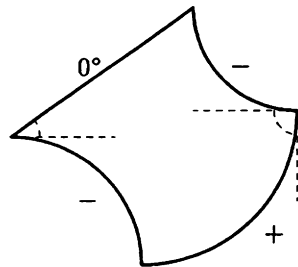
Els costats del polígon es mesuren també en graus, de la manera següent:

1) segments: 0° .

2) arcs amb la concavitat cap a l'interior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats positius.

3) arcs amb la concavitat cap a l'exterior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats negatius.

L'esquema il·lustra la manera de mesurar els costats i els angles d'un polígon mixtilini.



a) Demostreu que si en un polígon de n costats els angles són $A_1, A_2, \dots, A_n$ i els costats són $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, llavors es compleix

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + (n - 2) 180^\circ.$$

b) Demostreu que si els tres costats d'un triangle mixtilini tenen un punt en comú que no és un vèrtex, llavors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

c) Si tenim un angle mixtilini A inscrit en una circumferència, calculeu A en funció dels costats α , β i γ del triangle que queda determinat a la circumferència.

Problemes de la XXXIII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya, celebrada a València), 1996-97

Primera sessió. 7 de Març de 1997, de 16 h a 20 h.

33E1.—Calculeu la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica sabent que la suma de tots els termes val -1 , i la suma dels que ocupen el lloc parell val $+1$.

33E2.—Un quadrat de costat 5 es divideix en 25 quadrats unitat per mitjà de rectes paral·leles als costats. Sigui A el conjunt dels 16 punts interiors, que són vèrtexs dels quadrats unitat, però que no estan en els costats del quadrat inicial.

Digueu quin és el més gran nombre de punts de A que es poden elegir de manera que tres qualssevol d'ells no siguin vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles.

33E3.—Es consideren les paràboles $y = x^2 + px + q$ que tallen els eixos de coordenades en tres punts diferents, pels quals es fa passar una circumferència. Demostreu que totes les circumferències traçades en variar p i q a $\mathbb{R}$ passen per un punt fix, que cal determinar.

Segona sessió. 8 de Març de 1997, de 9 h a 13 h.

33E4.—Sigui p un nombre primer. Determineu tots els enters $k \in \mathbb{Z}$ tals que $\sqrt{k^2 - pk}$ és un enter positiu.

33E5.—Demostreu que en un quadrilàter convex d'àrea unitat, la suma de les longituds de tots els costats i diagonals no és menor que $2(2 + \sqrt{2})$.

33E6.—Un cotxe ha de fer una volta completa a un circuit circular. La quantitat exacta de benzina que necessita està distribuïda en dipòsits fixos situats en n punts diferents qualssevol del circuit. Inicialment el dipòsit del cotxe està buit. Demostreu que qualsevol que sigui la distribució del combustible als dipòsits, sempre existeix un punt de sortida de forma que es pugui fer una volta completa.

Aclariments:

Se suposa que el consum és uniforme i proporcional a la distància.

El dipòsit del cotxe té capacitat suficient per tota la benzina.

GEOMETRIA

Sebastià Xambó i Descamps

Aquest capítol conté un promptuari de conceptes bàsics de geometria elemental (seccions 1 i 2) i una col·lecció de problemes (secció 3). També conté una mostra de solucions, que presentem en dues modalitats: d'una manera convencional a la secció 5 i amb forma de diàleg a la secció 4. La raó d'incloure aquesta modalitat està en el fet que ens permet introduir, d'una manera directa i breu, qüestions relatives a la resolució de problemes que poden ser útils a alguns lectors.

Al lector més interessat en la resolució de problemes de geometria clàssica, li hem de recomanar que comenci a treballar directament la llista de problemes, i que retorni a la matèria del capítol (o a algun dels textos indicats a les referències) només quan ho consideri necessari.

En canvi, al lector més motivat per completar els seus coneixements geomètrics bàsics (una necessitat que, per altra banda, pot ser més general del que el nivell de la nostra exposició podria fer pensar, sobretot atenent al tractament de la geometria que es dona a primària i secundària), li hem de recomanar que estudiï primer les seccions 1 i 2, fins al punt d'omplir tots els detalls de les demostracions que s'ometen, o de les demostracions de les quals només es donen les pinzellades principals, i de resoldre satisfactòriament els exercicis intercalats.

Per contrast amb un estudi sistemàtic de la geometria, en el qual els sistemes geomètrics més importants s'erigeixen sistemàticament a partir d'axiomes convenients, en aquesta exposició pressuposem un coneixement intuïtiu de les nocions i els enunciats més primitius de la geometria euclidiana plana, com ara els relatius a punts, rectes, angles i circumferències. Evitem així prolises disquisicions, relatives a la construcció i anàlisi metòdica d'aquests conceptes i enunciats, que no aportarien gaire res als propòsits del capítol i que, en tot cas, s'estudien en cursos específics de geometria.

El signe [◊] al final d'una afirmació significa que es considera que la prova d'aquesta és fàcil o rutinària, però potser no totalment immediata, i per tant es recomana que el lector la comprovi efectivament abans de prosseguir la lectura.

1 Triangles i circumferències

El fet que moltes figures es puguin estudiar relacionant-les amb triangles, com ara quan admeten una triangulació, fa que el triangle s'hagi de considerar com una figura fonamental, i és per aquesta raó que se li dedica un espai considerable en els textos de geometria clàssica. Per altra banda, l'estudi del triangle ha estat inseparable del de la circumferència, bàsicament a causa del fet que tot triangle determina una única circumferència en la qual és inscrit (*circumferència circumscrita*). Com a objecte d'aquesta secció ens hem proposat, doncs, fer una revisió d'algunes de les propietats bàsiques del triangle i d'algunes de les relacions més remarcables entre triangles i circumferències.

Propietats bàsiques del triangle

Si ABC és un triangle, posarem a, b, c per indicar els costats oposats a A, B, C , respectivament. Els angles corresponents als vèrtexs es denotaran $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, o α, β, γ ; són els angles oposats als costats a, b, c , respectivament. L'altura corresponent al vèrtex A es denotarà h_A o h_a (i, anàlogament, h_B o h_b per al vèrtex B , i h_C o h_c per al vèrtex C). Amb les notacions AB i $[AB]$ indiquem, respectivament, la recta que uneix els punts A i B i el segment (tancat) d'extrems A i B . El corresponent segment obert serà denotat (AB) . La longitud del segment $[AB]$ serà denotada $\overline{AB}$ si pel context no hi ha perill que es pugui confondre amb la recta que uneix A i B ; en cas contrari, la denotarem $|AB|$ o $\overline{AB}$.

Igualtat de triangles

Un desplaçament és una transformació dels punts del pla que conserva les distàncies (vegeu el subapartat «Desplaçaments», pàg. 92). Dos triangles ABC i $A'B'C'$ es diuen *iguals*, o *congruents*, quan hi ha un desplaçament φ tal que $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ i $\varphi(C) = C'$. Per als tres criteris d'igualtat que segueixen, vegeu la figura 1.

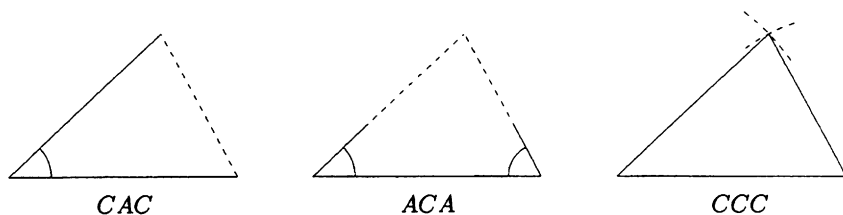


Figura 1: Criteris d'igualtat de triangles

Criteri CAC. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, dos costats i l'angle que formen. En particular, dos triangles rectangles són iguals quan els corresponents catets són iguals.

Criteri ACA. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat i els seus dos angles contigus. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals un catet i el corresponent angle agut.

Criteri CCC. Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, els tres costats.

Suma dels angles d'un triangle

La suma dels tres angles de qualsevol triangle és π (figura 2).

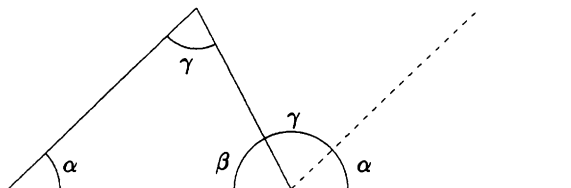


Figura 2: Suma dels angles d'un triangle

E. 1. Proveu que l'altura sobre el major dels costats d'un triangle és interior al triangle i inferior a les altres dues altures.

E. 2. Sigui P el punt a l'interior d'un quadrat $ABCD$ tal que $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 15^\circ$. Demostreu que el triangle ABP és equilàter (indicació: formeu un triangle BCP' congruent amb CDP i amb P' interior al quadrat).

Desigualtat triangular

En un triangle cada costat és inferior a la suma dels altres dos.

E. 3. Donat un punt P a l'interior d'un triangle ABC , demostreu que $AP + BP < AC + BC$.

Àrea d'un triangle

S'obté com la meitat del producte d'un costat (base) per la corresponent altura (per exemple, àrea = $\frac{1}{2}ah_A$, on h_A denota l'altura corresponent al vèrtex A). També és igual a la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen (per exemple, $h_A = b\sin(\gamma)$ i, per tant, àrea = $\frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$). Observeu que si movem un vèrtex sobre la paral·lela a la base oposada, els triangles resultants tenen tots la mateixa àrea.

E. 4. Donat un quadrilàter convex $ABCD$, demostreu que la seva àrea és igual a $\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin(\alpha)$, on α és un qualsevol dels dos angles que formen les diagonals AC i BD .

Geometria

E. 5 (Teorema de Ceva). Sigui ABC un triangle i X, Y i Z punts dels segments oberts (BC) , (CA) i (AB) , respectivament. Demostreu que les rectes AX, BY i CZ són concurrents si i només si

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

(si AX, BY i CZ són concurrents en el punt P , proveu que BX/XC és igual al quocient de les àrees dels triangles APB i APC).

D'una recta que uneix un vèrtex A d'un triangle amb un punt del costat oposat $[BC]$, se'n diu una *cevana* del triangle respecte del vèrtex A .

Teorema de Pitàgores

En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és la suma dels quadrats dels catets. Per a una demostració, vegeu l'exercici que segueix.

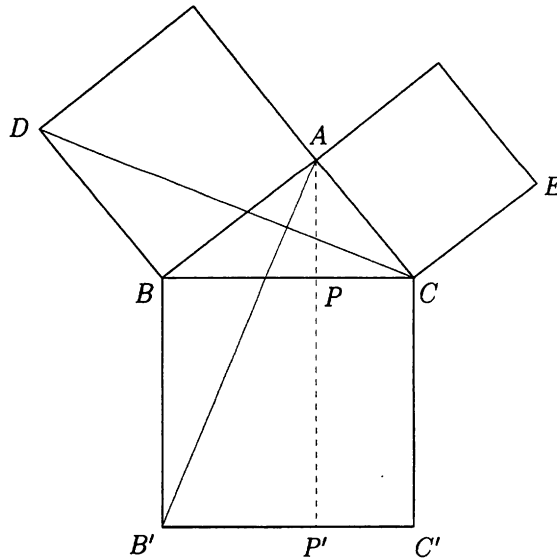


Figura 3: Teorema de Pitàgores

E. 6. Amb les notacions de la figura 3, mostreu que si el triangle ABC és rectangle, amb A l'angle recte, i AP és l'altura corresponent al vèrtex A , llavors l'àrea del quadrat AD és igual a l'àrea del rectangle $BPP'B'$. Deduïu-ne el teorema del catet (vegeu l'epígraf «Teorema del catet», pàg. 96) i el teorema de Pitàgores.

Teorema del cosinus

En un triangle de costats a, b, c , es compleix que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha),$$

on α és l'angle oposat al costat a (aquest enunciat es dedueix fàcilment a partir del teorema de Pitàgores aplicat als triangles APC i BPC , on P és el peu de l'altura de C).

E.7. Si dos triangles tenen dos parells de costats respectivament iguals i els corresponents angles desiguals, llavors entre els costats oposats a aquests angles hi ha la mateixa relació de desigualtat.

Teorema del sinus

En un triangle de costats a, b i c , i angles α, β i γ , es compleix que

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Aquesta propietat surt directament de les definicions: si h és l'altura del vèrtex C d'un triangle ABC , llavors $h = a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$, d'on resulta la primera de les igualtats. Aplicant el mateix raonament als costats b i c , s'obté la segona igualtat. El valor comú dels quocients $a/\sin(\alpha)$, $b/\sin(\beta)$ i $c/\sin(\gamma)$ serà determinat al subapartat «Radi de la circumferència circumscrita», pàg. (102).

E.8. Sigui ABC un triangle i suposem que β' i γ' són angles tals que $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$ i $b/\sin(\beta') = c/\sin(\gamma')$. Demostreu que $\beta' = \beta$ i $\gamma' = \gamma$.

Longitud de les mitjanes

Les *mitjanes* d'un triangle són les rectes que uneixen els seus vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats corresponents.

Si M és el punt mitjà del costat AB i $m = CM$, on ABC és un triangle donat, aplicant el teorema del cosinus als triangles MAC i MBC , i sumant i restant les dues relacions que s'obtenen, s'arriba fàcilment a les dues relacions següents:

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c^2}{4} + m^2\right), \quad a^2 - b^2 = 2cd,$$

on d és la distància de M al peu P de l'altura del vèrtex C i on hem suposat $a \geq b$.

La primera de les relacions anteriors ens permet trobar la mitjana m en funció dels costats a, b, c :

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

E.9. Si en un triangle dues mitjanes són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

Geometria

E. 10. Siguin A i B dos punts, M el seu punt mitjà, $c = AB$ i $k \geq c^2/2$ un nombre real. Proveu que la circumferència de centre M i radi $\sqrt{k/2 - c^2/4}$ coincideix amb el lloc geomètric dels punts tals que la suma dels quadrats de les seves distàncies a A i a B és igual a k .

E. 11. Amb les mateixes notacions i hipòtesis que en l'exercici anterior, proveu que el lloc geomètric dels punts tals que la diferència dels quadrats de les seves distàncies a B i a A és igual a k , coincideix amb la recta perpendicular a AB pel punt del segment $[AM]$ que és a la distància $k/(2c)$ de M .

Alguns punts associats a un triangle

En cada triangle es poden considerar diversos punts que tenen, cada un d'ells, una relació geomètrica remarcable amb el triangle. En aquest apartat considerarem el circumcentre, l'ortocentre, l'incentre i els excentres. Més endavant n'estudiarem d'altres.

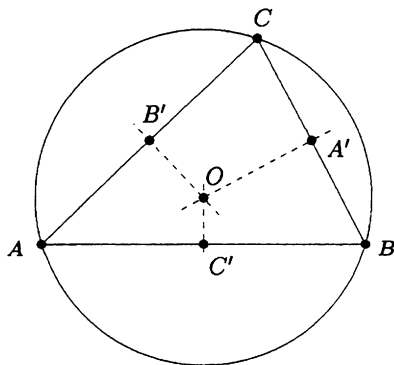


Figura 4: Circumcentre

Circumcentre

Les mediatrises dels costats d'un triangle ABC es tallen en un punt, O , anomenat *circumcentre* del triangle (la *mediatriu* d'un segment és la recta perpendicular pel seu punt mitjà; els seus punts són precisament els que equidisten dels extrems del segment). Així, doncs, el punt O equidista dels tres vèrtexs i és, per tant, el centre de l'única circumferència que passa per ells. Aquesta circumferència s'anomena *circumferència circumscrita* del triangle ABC . També ens hi referim dient que és «la circumferència ABC » (figura 4).

Ortocentre i triangle òrtic

Les altures d'un triangle es tallen en un punt, H , anomenat *ortocentre* del triangle (figura 5).

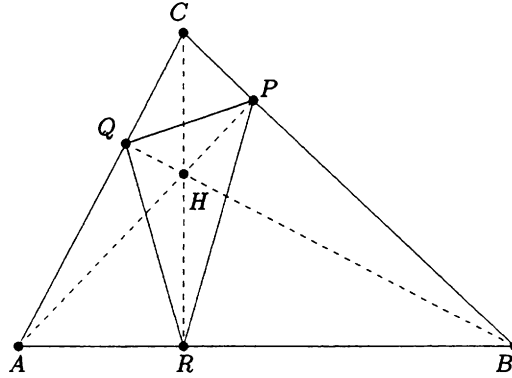


Figura 5: *Ortocentre i triangle òrtic*

Aquesta propietat és una senzilla conseqüència de l'exercici que segueix. El triangle PQR els vèrtexs del qual són els peus de les altures d'un triangle donat ABC s'anomena *triangle òrtic* de ABC .

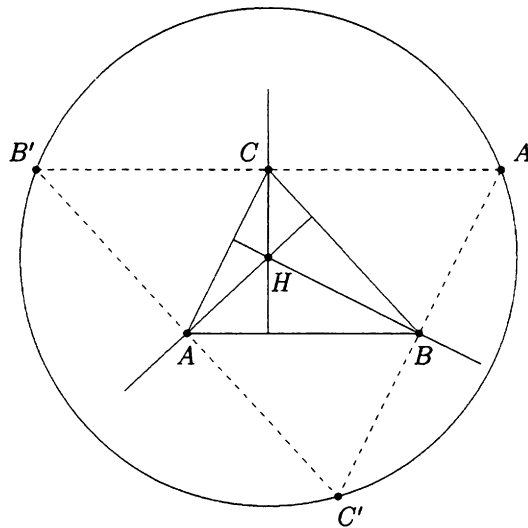


Figura 6: *Circumcentre $A'B'C' = \text{ortocentre } ABC$*

E. 12. Proveu que les altures d'un triangle són les mediatris del triangle els costats del qual són les paral·leles pels vèrtexs del primer triangle als corresponents costats oposats (figura 6).

Incentre

Les bisectrius dels angles d'un triangle es tallen en un punt, I , anomenat *incentre* del triangle (figura 7).

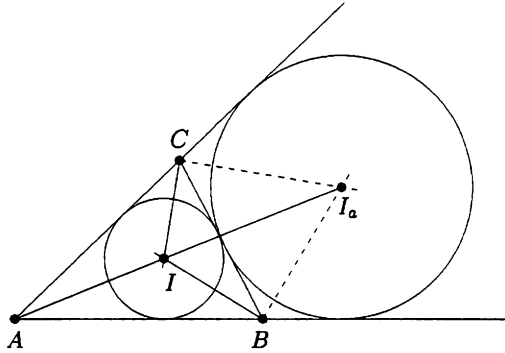


Figura 7: *Incentre i excentre*

La *bisectriu* d'un angle és la recta que el divideix en dos angles iguals; els seus punts són precisament els que equidisten dels dos costats de l'angle. Així, doncs, el punt I equidista dels tres costats i és, per tant, el centre de la *circumferència inscrita* al triangle, és a dir, la circumferència que és tangent als tres costats.

Excentres

Les bisectrius exteriors de dos angles B i C d'un triangle es tallen en un punt I_a que equidista de les perllongacions dels dos costats (c i b) del tercer angle A i del costat a oposat a A . Per tant, la bisectriu de A també passa per I_a , i així I_a és el centre d'una circumferència que és tangent al costat a del triangle i a les perllongacions de b i c (vegeu la figura 7). Es diu que el punt I_a és l'*excentre* del triangle relatiu al costat a . Els excentres I_b i I_c es defineixen anàlogament. Del fet que la bisectriu i la bisectriu exterior d'un angle d'un triangle siguin perpendiculars [o], se'n dedueix sense dificultat que les bisectrius d'un triangle són les altures del triangle $I_a I_b I_c$.

Circumferències i angles

La relació que hi ha entre un angle i una circumferència té propietats i aplicacions remarcables. Aquesta secció en conté una mostra.

Angle inscrit en una circumferència

Un angle inscrit en una circumferència (és a dir, un angle el vèrtex del qual està sobre la circumferència) és la meitat de l'angle central corresponent a l'arc comprès per aquell. És

clar, doncs, que el valor de l'angle només depèn de l'arc que comprèn i no de la posició del seu vèrtex sobre la circumferència (figura 8).

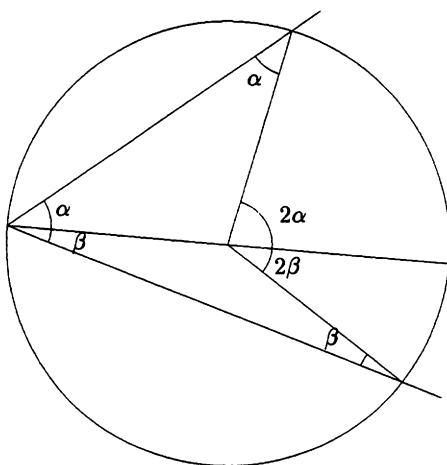


Figura 8: Angles inscrits en una circumferència

E. 13. Dos triangles rectangles amb la mateixa hipotenusa tenen la mateixa circumferència circumscrita. A més, el centre d'aquesta circumferència és el punt mitjà de la hipotenusa compartida.

E. 14. Donat un triangle ABC , siguin $P, V \in [BC]$ el peu de l'altura de A i el punt d'intersecció de la bisectriu de $\hat{A}$ amb BC . Siguin D i E els peus de les perpendiculars a AB i AC per P i V , respectivament. Demostreu que si $\alpha = \hat{A}/2$, llavors $\widehat{DPB} = \widehat{EPC} = \alpha$.

Un angle inscrit en una circumferència és recte quan l'arc que comprèn és una semicircumferència (vegeu la figura 9.a). Aquesta propietat es pot usar per trobar les tangents a una circumferència C des d'un punt P exterior: són (figura 9.b) les rectes que uneixen P amb els punts d'intersecció de C amb la circumferència que té per diàmetre el segment OP , on O és el centre de C .

Angle interior i angle exterior

Un angle el vèrtex del qual és exterior a una circumferència i els dos costats del qual la tallen (s'admet també que un costat de l'angle, o els dos, siguin tangents), és la semidiferència dels dos angles centrals corresponents als dos arcs de la circumferència determinats per l'angle.

Aquesta propietat és una conseqüència immediata del fet que un angle interior x d'un triangle és, amb les notacions de la figura 10.a, la diferència dels angles α i β .

Anàlogament, un angle, el vèrtex del qual és interior a una circumferència, és la semisuma dels angles centrals corresponents als dos arcs determinats per l'angle (figura 10.b).

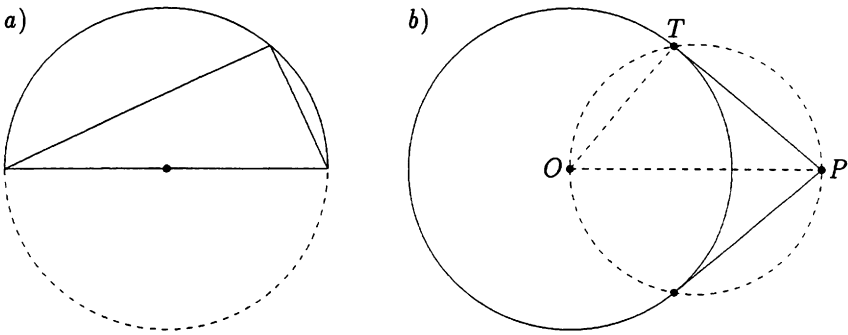


Figura 9: a) Angle recte inscrit. b) Tangents des d'un punt a una circumferència

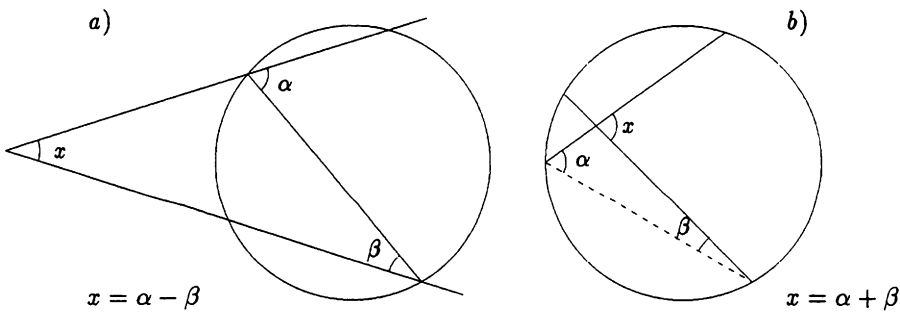


Figura 10: Angles exterior i interior a una circumferència

Arc capaç

Donat un segment AB i un angle α , el lloc geomètric dels punts P d'un dels semiplans definits per AB i tals que $\widehat{APB} = \alpha$, és un arc de circumferència els extrems del qual són A i B (d'aquest arc, se'n diu que és l'arc capaç de l'angle α respecte del segment AB). Vegem com es pot construir.

Suposem primer que $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Sobre la mediatriu de AB (vegeu la figura 11), i en el semiplà en qüestió (a la figura 11 suposem que és el semiplà per sobre de AB), considerem el punt O tal que $\widehat{AOM} = \alpha$, on M és el punt mitjà de AB . Llavors, els punts P de la circumferència de centre O i radi OA que pertanyen a l'esmentat semiplà són precisament els que compleixen $\widehat{APB} = \alpha$ i formen, amb les notacions de la figura 11, l'arc APB . Si ara ens fixem que l'arc $AP'B$ és el capaç de $\pi - \alpha$ respecte de AB en el semiplà oposat, esdevé també clar com podem construir l'arc capaç d'un angle $\beta \in (\pi, 2\pi]$.

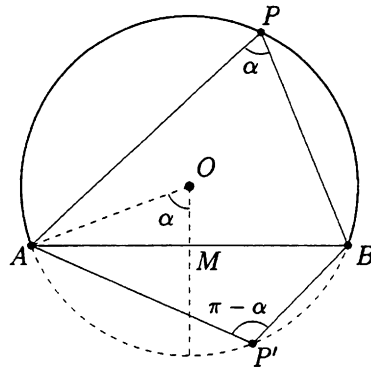


Figura 11: Arc capaç d'un angle respecte d'un segment

E.15. A la figura 12, un vaixell situat al punt P ignora les coordenades d'aquesta posició, però mitjançant un mapa pot obtenir les dels punts A , B i C situats a la costa i mitjançant un goniòmetre pot determinar els angles α i β . Podeu obtenir les coordenades de P , sabent que $A = (6, 5)$, $B = (10, 28)$, $C = (43, 48)$, $\alpha = 1,04754$ rad i $\beta = 0,53791$ rad?

Criteri CAA

Dos triangles són iguals si tenen iguals, respectivament, un costat, un angle contigu a aquest costat i l'angle oposat. En particular, dos triangles rectangles són iguals si tenen iguals les hipotenuses i un angle agut. Aquestes afirmacions es poden obtenir aplicant el subapartat anterior. En particular, la construcció d'un triangle, del qual coneixem un costat, un dels seus angles contigus i l'angle oposat, es pot fer fàcilment construint l'arc capaç de l'angle oposat.

2 Semblances

En la geometria clàssica, les idees relacionades amb la noció de semblança de figures hi tenen un paper important. Per les necessitats d'aquest capítol, els enuncisats més útils són els següents *criteris de semblança de triangles*:

Criteri CAC. Dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els corresponents costats proporcionals.

Criteri AA. Dos triangles són semblants si tenen iguals dos angles corresponents.

Criteri CCC. Dos triangles són semblants si els corresponents costats són proporcionals.

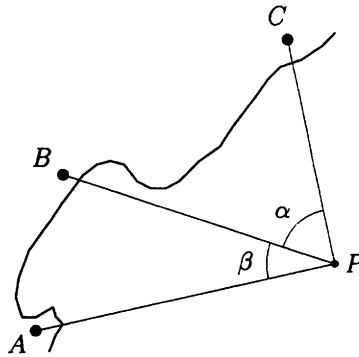


Figura 12: Un vaixell determina la seva posició

El lector que no tingui dubtes sobre el significat d'aquests criteris, pot ometre l'apartat que segueix i continuar la lectura a l'apartat «Semblances i geometria del triangle».

Generalitats

En aquest apartat exposem breument els conceptes i enunciats més rellevants relatius a les semblances. Primer considerem els desplaçaments. Després el teorema de Tales, que és l'eina essencial per a l'estudi de les homotècies, i tot seguit les semblances en general. Finalment, revisem les relacions que hi ha entre el producte dels nombres complexos i les semblances.

Desplaçaments

Un *desplaçament* del pla és una transformació que conserva les distàncies. Els desplaçaments conserven els angles. Un desplaçament es diu *directe* si conserva l'orientació del pla; altrament, es diu *invers*. Les translacions i els girs són exemples de desplaçaments directes. Donats dos punts P i P' , posarem $t_{PP'}$ per denotar l'única translació que transforma P en P' . Donats un punt O i un angle α , el gir de centre O i amplitud α serà denotat $g_{O,\alpha}$.

Les simetries són exemples de desplaçaments inversos. La *simetria* respecte de la recta ℓ serà denotada s_ℓ : és la transformació $P \mapsto P'$ tal que P' és el simètric de P respecte de ℓ . La recta ℓ s'anomena *eix* de la simetria.

Es pot veure que els punts fixos d'un desplaçament directe el classifiquen, en el sentit següent: si no té punts fixos, és una translació; si té exactament un punt fix, és un gir; si té més d'un punt fix és la identitat. Pel que fa als desplaçaments inversos, hi ha dos casos: si té punts fixos, es tracta d'una simetria; altrament, és la composició ts_ℓ d'una simetria s_ℓ amb una translació t en la direcció de l'eix ℓ (es parla d'una *simetria amb lliscament*).

E. 16. Siguin s i s' les simetries respecte de les rectes ℓ i ℓ' . Per estudiar quin desplaçament és la composició $s's$, sigui α l'angle format per ℓ i ℓ' i posem O per denotar el punt d'intersecció

de ℓ i ℓ' quan $\alpha \neq 0$, i d per denotar la distància entre ℓ i ℓ' quan $\alpha = 0$ (rectes paral·leles). Demostreu que $s's$ és el gir de centre O i amplitud 2α si $\alpha \neq 0$, i la translació de magnitud $2d$ segons la direcció perpendicular de ℓ a ℓ' si $\alpha = 0$. Noteu que $s's$ es la identitat si $\ell = \ell'$.

E.17. Sigui ABC un triangle i construïm quadrats $ACES$ i $BCDT$ com a la figura 13. Demostreu que el punt M d'intersecció de l'altura h_C amb ED és el punt mitjà del segment ED .

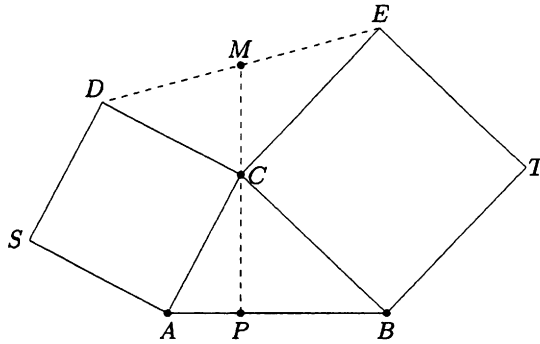


Figura 13: L'altura de C passa pel punt mitjà de DE

Teorema de Tales

Si dues rectes són tallades per un sistema de rectes paral·leles, els segments així obtinguts sobre una de les rectes són proporcionals als corresponents segments obtinguts sobre l'altra (figura 14).

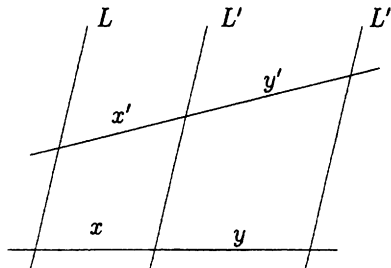


Figura 14: Teorema de Tales: $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \dots$

E.18. Si a la figura 14 les rectes L i L' són paral·leles i $x/x' = y/y'$, llavors L'' també és paral·lela a L .

E. 19 (Teorema de Menelau). Sigui ABC un triangle i X, Y i Z punts sobre les rectes BC, CA i AB , respectivament. Demostreu que X, Y i Z estan alineats si i només si

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1;$$

convenim que un quocient com ara BX/CX és positiu o negatiu segons que X sigui exterior o interior al segment $[BC]$ (indicació: si X, Y i Z estan sobre una recta L i d_A, d_B i d_C indiquen les distàncies de A, B i C a L , respectivament, amb el convenció que aquestes distàncies es compten com a positives a un costat de L i com a negatives a l'altre, llavors es compleix la relació $BX/CX = d_B/d_C$, i les anàlogues per Y i Z).

Homotècies

L'*homotècia de centre* O (un punt) i *mòdul* o *raó* k (un nombre real no nul) és la transformació $A \mapsto A'$ tal que $O' = O$ i, si $A \neq O$, A' és el punt de la recta OA tal que $OA'/OA = k$ (aquí fem el convenció que A' és de la semirecta OA si $k > 0$ i de la semirecta oposada a OA si $k < 0$). Els enunciats que segueixen es proven fàcilment emprant el teorema de Tales i l'exercici E.18.

La transformació d'una recta per una homotècia és una recta paral·lela a la primera. Val un enunciat anàleg per segments. D'aquí en resulta que angles homòlegs per una homotècia són iguals.

Les rectes pel centre d'homotècia són fixes, i són les úniques rectes fixes si $k \neq 1$ (si $k = 1$, l'homotècia és la identitat).

Segments homòlegs per una homotècia són proporcionals segons el valor absolut $|k|$ de la raó d'homotècia. D'aquí resulta que la transformació de la circumferència de centre P i radi r per l'homotècia h de raó k és la circumferència de centre $h(P)$ i radi $|k|r$.

E. 20. Dos triangles no congruents són homotètics si els costats d'un són paral·lels als corresponents costats de l'altre.

E. 21. Dues circumferències sempre són homotètiques i els seus centres estan alineats amb el centre de qualsevol homotècia que transformi l'una en l'altra.

Figures semblants

Dues figures són semblants si una es pot obtenir de l'altra mitjançant la composició d'una homotècia i un desplaçament. Una semblança transforma rectes en rectes i segments en segments. Segments homòlegs són proporcionals i angles homòlegs són iguals. Una semblança es diu *directa* o *inversa* segons que conservi l'orientació del pla o la inverteixi.

E. 22. Proveu els criteris de semblança de triangles enunciats al principi d'aquesta secció.

Raó àuria. Donat un segment de longitud $a > 0$, el seu *segment auri* és el segment de longitud $x > 0$ tal que $a/x = x/(a - x)$. Com que aquesta relació és equivalent a l'equació $x^2 + ax - a^2 = 0$, obtenim que $x = \rho a$, on

$$\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

El nombre real ρ s'anomena la *raó àuria*. Com que $\rho^2 + \rho - 1 = 0$, resulta que

$$\rho^{-1} = 1 + \rho = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Un *rectangle auri* és aquell pel qual la base menor és segment auri de la base major. Això equival a dir que el rectangle és semblant al que resulta de separar-ne el quadrat de costat la base menor (figura 15).

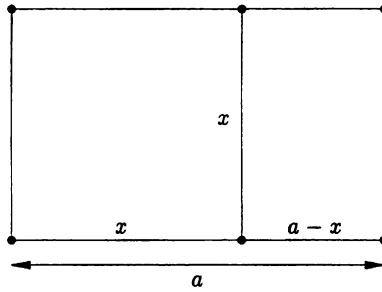


Figura 15: *Rectangle auri*

Semblances i nombres complexos

Si representem els punts del pla per nombres complexos, i $w = r_\alpha = r \cdot 1_\alpha$ és el nombre complex de mòdul r i argument α , llavors la transformació $z \mapsto wz$ és la composició del gir d'angle α amb centre a l'origen seguit de l'homotècia de raó r amb el mateix centre. La raó d'això és que el mòdul i l'argument d'un producte de dos nombres complexos són el producte i la suma dels mòduls i arguments dels factors, respectivament ($|wz| = |w||z|$ i $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$).

E. 23. Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles i interpretem $B - A$, $C - A$, $B' - A'$ i $C' - A'$ com a nombres complexos. Demostreu que ABC i $A'B'C'$ són directament semblants si i només si $(C' - A')/(B' - A') = (C - A)/(B - A)$.

E. 24. Siguin $A_1A_2A_3$ i $A'_1A'_2A'_3$ dos triangles directament semblants. Sigui $t \in \mathbb{R}$ fix i definim $A''_i = A_i + t(A'_i - A_i)$, $i = 1, 2, 3$. Demostreu que els triangles $A_1A_2A_3$ i $A''_1A''_2A''_3$ són directament semblants. Val la mateixa conclusió si tenim, en lloc de triangles, figures directament semblants $A_1A_2 \dots A_k$ i $A'_1A'_2 \dots A'_k$ i definim A''_i com abans per $i = 1, 2, \dots, k$ (a la figura 16 il·lustrem el cas en què la figura és un pentàgon regular).

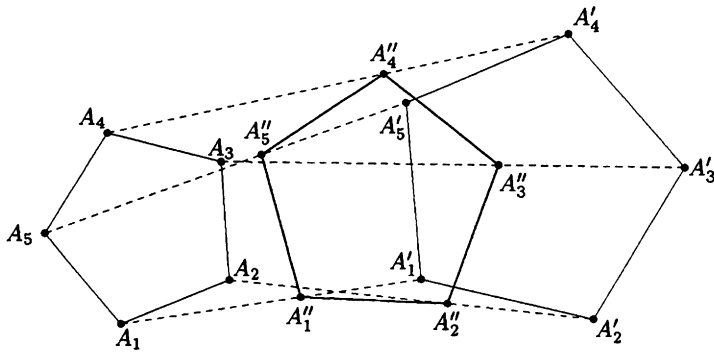


Figura 16: A''_i divideix $A_i A'_i$ en la proporció 3/5

En la resta d'aquesta secció presentem, agrupades en dos apartats, un nombre de situacions geomètriques en les quals les semblances són l'element decisiu per provar els enunciats.

Semblances i la geometria del triangle

Vegem tot seguit algunes de les aplicacions més bàsiques de les semblances a l'estudi de les propietats del triangle.

Mitjanes i baricentre

Les tres mitjanes es tallen en un punt, G , anomenat *baricentre* del triangle. Si A és un vèrtex qualsevol i A' el punt mitjà del costat oposat a A , llavors $GA = 2GA'$ o, equivalentment, $AA' = 3GA'$ (vegeu la figura 17 i noteu que els triangles ABG i $A'B'G$ són semblants, pel criteri AAA de semblança, i que $A'B' = \frac{1}{2}AB$).

Teorema de l'altura

L'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és la mitjana proporcional entre els dos segments en què el peu de l'esmentada altura divideix la hipotenusa. En símbols, $CP^2 = AP \cdot BP$, on el triangle ABC se suposa rectangle en el vèrtex C i on P és el peu de l'altura del vèrtex C (vegeu la figura 18). En efecte, els triangles BPC i CPA són semblants, ja que tenen els tres angles iguals (recordem que dos angles són iguals si els seus corresponents costats són perpendiculars). Així, doncs, $x/h = h/(a - x)$, igualtat que equival a la relació enunciada.

Teorema del catet

Amb les mateixes notacions de la figura 18, els triangles BPC i BCA són semblants, ja que són rectangles i tenen un angle comú. Per tant, $x/a = a/c$, la qual cosa ens diu que en un

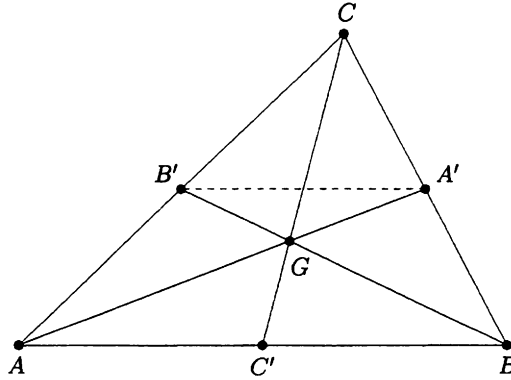


Figura 17: Baricentre d'un triangle

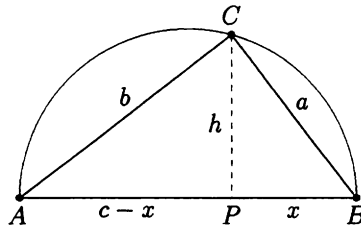


Figura 18: Teoremes de l'altura i del catet

triangle rectangle la longitud d'un catet, per exemple a , és la mitjana proporcional entre la hipotenusa, c , i la projecció del catet, x , sobre aquella. Per a una altra demostració, i també una interpretació, vegeu l'exercici E.6.

Així, tenint en compte el subapartat anterior, tenim que els triangles rectangles ABC , ACP i CBP són semblants. És clar, a més a més, que l'àrea de ABC és la suma de les àrees de ACP i CBP . Això ens proporciona una nova comprensió del teorema de Pitàgores: si el quocient de l'àrea del quadrat de costat AB per la del triangle ABC és k , és a dir, si $c^2 = k \cdot ABC$, llavors $a^2 = k \cdot CBP$ i $b^2 = k \cdot ACP$, d'on $a^2 + b^2 = k(CBP + ACP) = k \cdot ABC = c^2$. Notem que aquest argument prova que si apliquem una mateixa construcció sobre la hipotenusa i els catets d'un triangle rectangle (suposant que la construcció proporcioni una àrea a partir d'un segment), llavors l'àrea de la figura sobre la hipotenusa és la suma de les àrees de les figures sobre els catets.

Per exemple, si la construcció és la del polígon regular de $n \geq 3$ costats sobre un segment donat, obtenim que l'àrea del n -gon regular de costat la hipotenusa d'un triangle rectangle és la suma de les àrees dels n -gons regulars els costats dels quals són els catets. Anàlogament, tenim que l'àrea del semicercle que té per diàmetre la hipotenusa és la suma de les àrees dels semicercles que tenen per diàmetre els catets (figura 19).

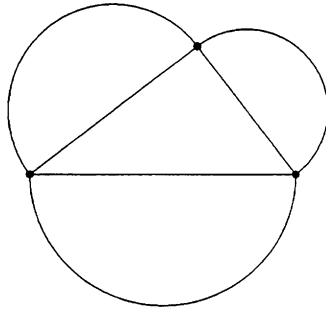


Figura 19: Teorema de Pitàgores per semicercles

Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui P un punt i C una circumferència que no passa per P . Considerem dues rectes per P que tallen C en els punts A i A' , B i B' , respectivament (figura 20). Aleshores els triangles PAB' i PBA' són semblants, ja que tenen dos angles iguals, i per tant $PA/PB = PB'/PA'$, o bé $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Així doncs, el producte $PA \cdot PA'$ és independent de la recta que prenguem per P (entre les que tallen C) i el seu valor s'anomena *potència de P respecte de C* . Prenent la recta que passa per P i pel centre de C , veiem que la potència és igual a $(d - r)(d + r) = d^2 - r^2$, on d és la distància de P al centre de C i r el radi de C .

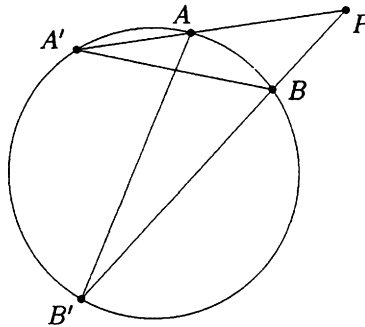


Figura 20: Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Punts concíclics. Ara no hi ha dificultat a deduir que si A i A' , B i B' , són dues parelles de punts distints i les rectes AA' i BB' es tallen en un punt P , aleshores els punts A , A' , B i B' són *concíclics* (això és, estan continguts en una mateixa circumferència) si i només si $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

Eix radical. El lloc geomètric dels punts que tenen la mateixa potència respecte de dues circumferències no concèntriques és una recta perpendicular a la que uneix els seus centres O_1 i O_2 , i s'anomena *eix radical* de les dues circumferències. En efecte, siguin d_1 i d_2 les distàncies d'un punt P als centres de les dues circumferències, i siguin r_1 i r_2 els seus radis. La condició que la potència de P sigui la mateixa respecte de les dues circumferències és $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$, o bé $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Com que $\delta = r_1^2 - r_2^2$ és constant, el lloc geomètric és el dels punts P tals que $d_1^2 - d_2^2 = \delta$, que sabem que és la recta perpendicular a O_1O_2 pel punt que està a la distància $\delta/(2c)$ del punt mitjà del segment $[O_1, O_2]$, on c és la distància entre O_1 i O_2 (vegeu l'exercici E.11). És a dir, la posició del punt d'intersecció de l'eix radical amb la recta O_1O_2 és $m + (r_1^2 - r_2^2)/(2c)$.

Si les dues circumferències es tallen, l'eix radical és la recta que uneix els dos punts d'intersecció (o la tangent comuna si són tangents). En efecte, els punts d'intersecció tenen la mateixa potència ($= 0$) respecte de les dues circumferències.

Centre radical. El *centre radical* de tres circumferències que no tenen els centres alineats és l'únic punt que té la mateixa potència respecte de les tres circumferències. Aquest punt és la intersecció de dos qualssevol dels eixos radicals de les tres parelles de circumferències que podem formar.

Propietats mètriques de les bisectrius

Considerem el triangle ABC de la figura 21.

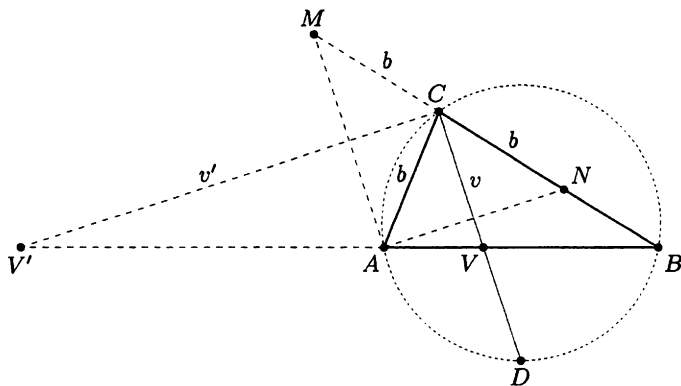


Figura 21: *Determinació de les bisectrius*

Segui M el punt sobre BC , a continuació de C , tal que $CM = b$. Per construcció, el triangle ACM és isòceles. Per tant, la bisectriu v' de $\widehat{ACM}$ és perpendicular a la base AM . Com que la bisectriu v és perpendicular a v' , v és paral·lela a AM . Aplicant el teorema de Tales, obtenim que

$$\frac{BV}{a} = \frac{VA}{b} = \frac{c}{a+b}.$$

Considerant el punt N del segment BC tal que $NC = b$, resulta que AN és paral·lela a v' , i

raonant de manera similar, obtenim que

$$\frac{BV'}{a} = \frac{AV'}{b} = \frac{c}{a-b}.$$

Per altra banda, no és difícil veure que si D és el punt d'intersecció de la semirecta CV amb el cercle ABC , llavors els triangles AVC i DBC són semblants (tenen dos angles iguals: un per definició de bisectriu, l'altre pel fet de ser angles inscrits que comprenen el mateix arc BC de la circumferència ABC). En resulta que $a/v = (v + VD)/b$, o bé $ab = v^2 + v \cdot VD$. Però com que $v \cdot VD = VA \cdot VB = abc^2/(a+b)^2$, tenim que

$$v^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = 4ab \frac{p(p-c)}{(a+b)^2}$$

on hem posat $p = (a+b+c)/2$ (el semiperímetre del triangle).

E. 25 (Steiner-Lehmus). Si en un triangle dues bisectrius són iguals, llavors el triangle és isòsceles.

Radi de les circumferències inscrita i exinscrita

Considerem la figura 22. Si posem $p = (a+b+c)/2$, aleshores es compleix que $AB' = AC' = p-a$: la primera igualtat és clara i la segona resulta del fet que $AB' + a = AB' + CA' + A'B = AB' + CA' + BC' = p$. De la mateixa manera tenim que $BA' = BC' = p-b$ i $CA' = CB' = p-c$. També tenim $AB'' = AC''$ i com que $AB'' = AC + CA''$ i $AC'' = AB + BA''$, veiem que $AB'' = AC'' = p$ [o]. Per tant $BA'' = BC'' = p-c$ i $CB'' = CA'' = p-b$. Finalment, $C'C'' = B'B'' = AB'' - AB' = p - (p-a) = a$ i $A'A'' = |BA' - BA''| = |p-b - (p-c)| = |b-c|$.

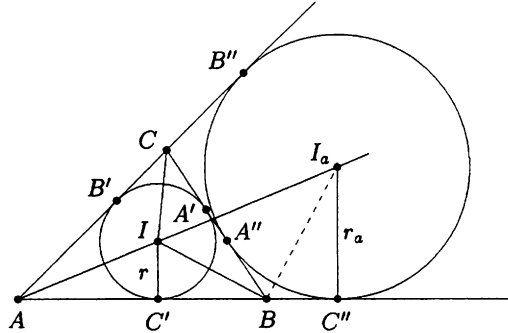


Figura 22: Radi de les circumferències inscrita i exinscrita

Atès que els triangles AIC' i $A_iA''C''$ són semblants, serà $r/r_a = (p-a)/p$. I atès que els triangles BIC' i $I_aB''C''$ també són semblants, $r/(p-b) = (p-c)/r_a$, o bé $rr_a = (p-b)(p-c)$. De les dues equacions obtingudes es dedueix que

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Els radis r_b i r_c de les altres dues circumferències exinscrites s'obtenen permutant cíclicament a, b i c en la segona de les fórmules anteriors.

Expressió de les altures en funció dels costats

Considerem la figura 23, en la qual N i M es defineixen de manera que estiguin alineats amb A i B , respectivament, amb $BM = BC$ i $AN = AC$. Així doncs, $NM = a + b + c = 2p$. Per les consideracions fetes al subapartat «Propietats mètriques de les bisectrius» (pàg. 99), sabem que CM (respectivament, CN) és paral·lela a la bisectriu interior IB (respectivament, IA), de manera que els triangles AIB i NCM són semblants. En resulta que $h_c/r = 2p/c$, d'on

$$h_c = 2pr/c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Canviant c per b i per a s'obtenen les fórmules que donen h_b i h_a .

D'aquestes expressions és clar que l'àrea S del triangle és donada per la fórmula d'Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

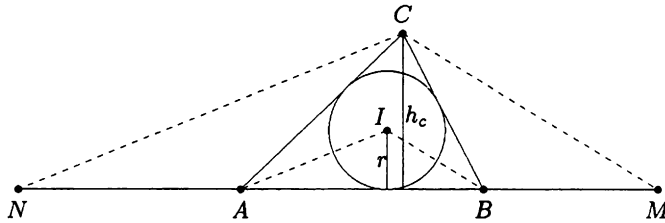


Figura 23: Altures en funció dels costats

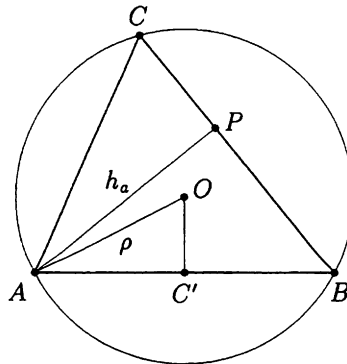


Figura 24: Radi de la circumferència circumscrita

Radi de la circumferència circumscrita

Considerem la figura 24. Els triangles APC i $AC'O$ són semblants: els dos són rectangles i $\widehat{AOC'}$ és la meitat de l'arc central comprès per l'angle inscrit $\widehat{ACB}$. Així, doncs, $AO/AC' = AC/AP$, o bé $\rho/(c/2) = b/h_a$. Per tant, $\rho = bc/2h_a$ i, introduint l'expressió de h_a en funció dels costats,

$$\rho = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Notem també que si $\gamma = \widehat{C}$ i $c = AB$, llavors $c/\sin(\gamma) = 2AC'/\sin(\gamma) = 2\rho$, ja que $AC'/\rho = \sin(\gamma)$. Això ens revela que el valor $a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$ (teorema dels sinus) és 2ρ , el diàmetre de la circumferència circumscrita.

Inversions

Donat un punt O i un nombre real $\rho \neq 0$, la *inversió de centre O i potència ρ* , $inv_{O,\rho}$, és l'aplicació $A \mapsto A'$ ($A \neq O$), definida per la fórmula

$$A' - O = \frac{\rho}{|OA|^2}(A - O).$$

Així A' és el punt que està sobre la recta OA , a una distància $|\rho|/|OA|$ de O , a la mateixa semirecta que A si $\rho > 0$ i a la semirecta oposada si $\rho < 0$. Atès que $|OA'| = |\rho|/|OA|$, tenim $A'' = A$ (ho expressarem dient que la $inv_{O,\rho}$ és *involutiva*).

Si $\rho > 0$ i posem $r = \sqrt{\rho}$, llavors els punts A que $inv_{O,\rho}$ deixa fixos són els de la circumferència de centre O i radi r , ja que si $|OA| = r$ llavors $\rho/|OA|^2 = 1$. En aquest cas es diu també que $inv_{O,\rho}$ és la inversió respecte de la circumferència $S = S(O, r)$ de centre O i radi r , i que A' és l'invers de A respecte de S . Pel que ja hem dit, també es té que A és l'invers de A' respecte de S .

Construcció. El punt A' invers de A respecte de S es pot construir de la següent manera. Suposem primer que $|OA| > r$. Si P i Q són els punts d'intersecció de la circumferència de centre A i radi $|OA|$ amb S , llavors els punts d'intersecció de les circumferències de radi r amb centres a P i Q són O i A' (figura 25).

En efecte, els triangles AOP i OPA' són semblants, ja que per construcció són isòsceles i comparteixen l'angle del vèrtex O . Per tant, $|OA|/|OP| = |OP|/|OA'|$, que equival a $|OA| \cdot |OA'| = r^2$, on $r = |OP|$. Per construir l'invers d'un punt interior de S respecte de S , és suficient veure com podem reconstruir el punt exterior A a partir de A' . Ara bé, amb les notacions anteriors, PQ és la mediatriu de OA' i A és la intersecció de les tangents a S en els punts P i Q .

Inversió de rectes i circumferències. Una figura F' es diu inversa d'una figura F respecte de la circumferència S si quan A recorre els punts de F (diferents del centre O de S), el punt A' invers de A respecte de S recorre els punts de F' (diferents de O). Si $F' = F$, direm que la figura F és *doble* per la inversió. Per exemple, els punts dobles són els fixos per la inversió, és a dir, els punts de S ; per tant, S és una circumferència doble; de la definició d'inversió, en resulta immediatament que les rectes per O són dobles.

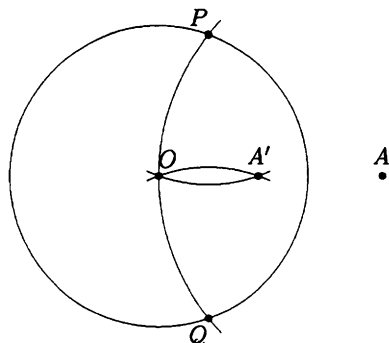


Figura 25: Construcció de l'invers de A

Una circumferència C de diàmetre d pel centre d'inversió O (figura 26.a) i la recta perpendicular $P'A'$ al diàmetre OP de C a una distància $d' = r^2/d$ de O , són figures inverses (notem que OP és l'únic diàmetre de C que passa per O). En efecte, els triangles OPA i $OA'P$ són semblants, ja que són rectangles (a A i P' , respectivament) i tenen un angle comú. Tenint en compte que $|OP| = d$ i $|OP'| = r^2/d$, tenim que $|OA|/d = r^2/d|OA'|$, d'on $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Remarquem que si $A, B \in S$ (figura 26.b), llavors la recta AB i la circumferència OAB són figures inverses respecte de S , ja que la inversa de la recta AB és una circumferència que passa per O i pels punts dobles A i B .

Anem a veure ara que la inversa C' d'una circumferència C que no passa pel centre d'inversió O és una circumferència. De fet, veurem que si P i Q són els extrems del diàmetre de C que passa per O , llavors C' és la circumferència de diàmetre $P'Q'$ (figura 27), on P' i Q' són els inversos de P i Q respecte de S .

En efecte, sigui C' la circumferència que acabem de definir. De $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$ obtenim $|OP'|/|OQ| = |OQ'|/|OP|$, valor que coincideix amb el mòdul k de l'homotècia de centre O que transforma C en C' . Sigui ara A un punt de C i determinem B i A' sobre C' com a la figura 27. Llavors $|OB| = k|OA|$ i $|OA'| \cdot |OB| = |OQ'| \cdot |OP'|$ (potència de O respecte de C'). Per tant,

$$|OA| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OB| \cdot |OA'| = \frac{1}{k}|OQ'| \cdot |OP'| = |OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

i això acaba la prova.

Notem que la raó, k , de l'homotècia de centre O que transforma C en C' és igual a r^2/p , on p és la potència de O respecte de C :

$$k = \frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OP| \cdot |OP'|}{|OP| \cdot |OQ|} = \frac{r^2}{p}.$$

E. 26. La recta PQ que uneix dos punts P i Q d'una circumferència C que no passa pel centre O d'una circumferència S i la recta $P'Q'$ que uneix els inversos P' i Q' de P i Q respecte de S , o bé es tallen sobre l'eix radical de C i C' , o bé aquest eix és paral·lel a ambdues rectes

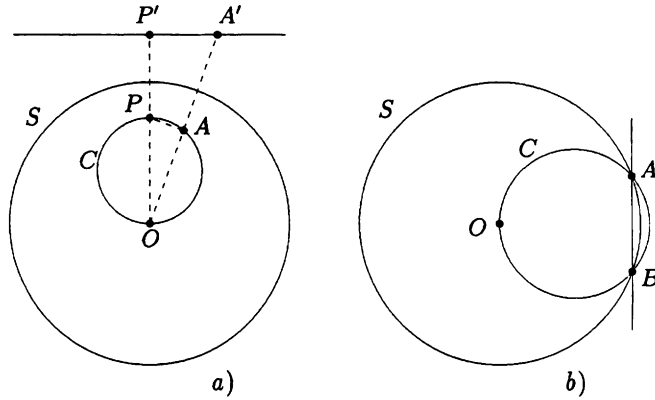


Figura 26: Inversa d'una circumferència pel centre d'inversió

(indicació: mostreu que els punts P, Q, P' i Q' estan sobre una circumferència K , amb la qual cosa el punt d'intersecció de PQ i $P'Q'$ –si es tallen– és el centre radical de C, C' i K).

E. 27. Amb les notacions del problema anterior, mostreu que la recta tangent a C en un punt P i la recta tangent a C' en el punt P' formen angles iguals amb la recta PP' . A més a més, o bé es tallen sobre l'eix radical de C i C' , o bé aquest és paral·lel a ambdues.

E. 28. Amb les notacions de la figura 26.a, mostreu que $\widehat{OA'P'}$ és igual a l'angle agut que OA forma amb la tangent a C pel punt A (indicació: aquest darrer angle coincideix amb l'angle agut que forma la tangent a C en el punt O amb OA).

Conservació dels angles. Els exercicis anteriors es poden usar per demostrar que les inversions conserven els angles. Per precisar més, un arc serà un segment (que pot ser una semirecta) o un arc de circumferència. Si dos arcs tenen el mateix origen, convindrem a mesurar l'angle que formen com el de les semirectes tangents als arcs en el vèrtex de l'angle. Com que les inversions transformen arcs en arcs, també transformen angles en angles i la propietat a què ens hem referit és que la mesura d'un angle coincideix amb la del seu transformat per una inversió. La demostració d'aquest fet es pot deixar com a exercici per al lector. Convé adonar-se, però, que el sentit del transformat d'un angle per una inversió és el contrari del de l'angle abans de transformar.

3 Problemes

Resoldre un problema, especialment un problema de geometria, és trobar un camí entre el que ens donen i el que ens demanen. Del que ens donen podem intentar *progressar* fent deduccions successives aplicant coneixements ja coneguts: és el procés de *síntesi* en el sentit dels antics grecs, i que en alguns diccionaris apareix reflectit com una de les accepcions del

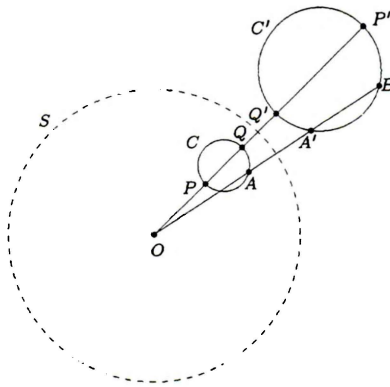


Figura 27: *Inversa d'una circumferència C que no passa per O*

mot. Fixem-nos que els coneixements pertinents per avançar sovint esdevenen clars quan parem esment en les coses que ens donen.

A l'altra banda, allà on volem arribar, sovint és útil preguntar-se quina *mena de cosa* ens demanen, ja que les respostes a aquesta pregunta solen donar *claus* inequívokes sobre quins coneixements convé invocar per aconseguir-ho: és el procés d'*anàlisi* dels antics grecs.

Aquests principis, i d'altres, els podeu trobar il·lustrats a la mostra de solucions, presentades en forma dialogada, a la secció 4.

Una advertiment: l'ordre en el qual donem els problemes no pressuposa cap graduació progressiva de la seva dificultat.

GE1. Amb les notacions de la figura 28, calculeu l'àrea del quadrat interior en funció de t .

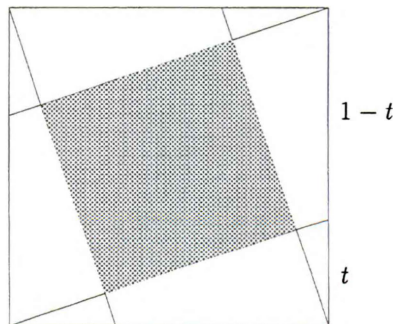


Figura 28: *Es demana l'àrea del quadrat gris en funció de t*

Geometria

GE2. Donada una corda a d'una circumferència C de radi 1 i centre O , considereu la circumferència C' determinada imposant que a en sigui un diàmetre. Si P és el punt de C' més allunyat de O , quin és el valor màxim de la distància PO ?

GE3. L'angle $\hat{A}$ d'un triangle isòsceles ABC és igual a $2/5$ d'un angle recte i $\hat{B} = \hat{C}$. La bisectriu de l'angle $\hat{C}$ talla el costat oposat en el punt D . Calculeu les valors dels angles del triangle BCD . Expressen la longitud, a , del costat BC en funció de la longitud, b , del costat AC .

GE4. Sigui ABC un triangle isòsceles amb $\hat{B} = \hat{C} = 80^\circ$. Siguin $D \in (A, B)$ i $E \in (A, C)$ els punts tals que $\widehat{BCD} = 50^\circ$ i $\widehat{CBE} = 60^\circ$. Quants graus té l'angle $\widehat{BED}$?

GE5 (Construcció de Descartes de segments auri). A la figura 29, la circumferència és tangent a AB al punt B i el seu diàmetre és igual a AB . Demostreu que AB és el segment auri de AD i que AC és el segment auri de AB .

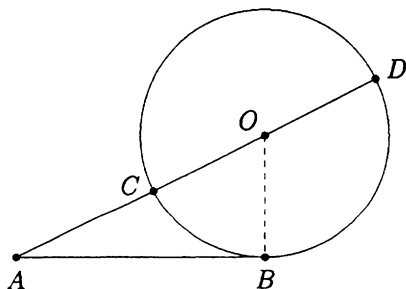


Figura 29: Una construcció geomètrica de segments auri

GE6. Proveu que en un pentàgon regular el costat és segment auri de la diagonal.

GE7. Donat un punt P interior a un triangle ABC , siguin X, Y i Z els peus de les perpendiculars des de P als costats BC, CA i AB , respectivament (es diu que XYZ és el triangle pedal del punt P relatiu al triangle ABC). Proveu que

$$YZ = \frac{a}{2\rho} PA, \quad ZX = \frac{b}{2\rho} PB, \quad XY = \frac{c}{2\rho} PC,$$

on ρ és el radi de la circumferència circumscriu al triangle.

GE8. En un triangle acutangle ABC , la bisectriu interior de l'angle $\hat{A}$ talla el costat BC en el punt K i el cercle circumscriu en el punt M . Siguin L i N els peus de les perpendiculars per K a AB i AC , respectivament. Demostreu que el quadrilàter $ALMN$ i el triangle ABC tenen la mateixa àrea.

GE9. En cada un dels vèrtexs d'un quadrat, el costat del qual fa un quilòmetre, hi ha una casa, i les quatre cases volen fer camins amb els que es puguin comunicar les unes amb les altres. Què poden fer, si només disposen de materials per construir $1 + \sqrt{3}$ km de camí?

GE10. Proveu que els tres angles d'un triangle ABC són aguts si i només si existeixen punts A' , B' i C' de l'interior dels costats BC , AC i AB , respectivament, tals que els segments AA' , BB' i CC' tenen la mateixa longitud.

GE11. Demostreu que qualsevol polígon convex d'àrea 1 està contingut en un rectangle d'àrea no superior a 2.

GE12 (Teorema de Morley). Donat un triangle ABC , construïm el triangle PQR tal com indica la figura 30. Demostreu que

$$|QR| = 8\rho \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma),$$

on ρ és el radi de la circumferència circumscrita a ABC . Notem que la simetria de la relació obtinguda mostra que el triangle PQR és equilàter, fet que és conegut com a *teorema de Morley*.

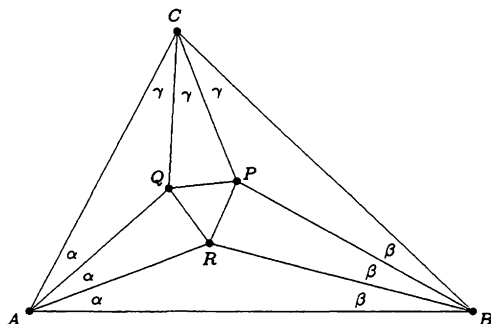


Figura 30: Teorema de Morley: PQR és equilàter

GE13. Sigui ABC un triangle i P un punt tal que $PA = 7$, $PB = 5$ i $PC = 3$. Demostreu que si ABC té, amb aquestes condicions, perímetre màxim, llavors P és l'incentre de ABC .

GE14. Siguin P , Q , R i S els centres dels quadrats construïts externament sobre els quatre costats d'un rombe. Demostreu que $PQRS$ és un quadrat. Si fixem el centre, el costat i l'orientació del rombe, i deixem que l'angle entre dos costats contigus variï, quin lloc geomètric descriu el punt P ?

GE15. Proveu que un quadrilàter convex és circumscriptible a una circumferència si i només si les sumes dels dos parells de costats oposats són iguals.

Geometria

GE16. Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt interior a un triangle als tres vèrtexs és superior a la meitat del perímetre i inferior al perímetre.

GE17. Sigui $2p$ el perímetre d'un triangle i μ la suma de les seves tres mitjanes. Demostreu que

$$\frac{3p}{2} < \mu < 2p.$$

GE18. Demostreu que un quadrilàter convex és inscriptible en una circumferència (és a dir, que existeix una circumferència que passa pels seus vèrtexs) si i només si té dos angles oposats suplementaris.

GE19. Proveu que les altures d'un triangle són les bisectrius del seu triangle òrtic (vegeu la figura 5). Resulta, així, que l'ortocentre d'un triangle coincideix amb l'incentre del seu triangle òrtic.

GE20 (Cercle d'Euler). Demostreu que els punts mitjans dels costats d'un triangle (figura 31) i els peus de les seves altures estan sobre un cercle.

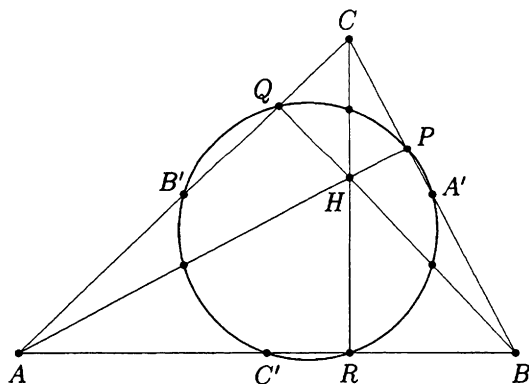


Figura 31: Cercle d'Euler, o dels nou punts

GE21. El cercle d'Euler d'un triangle també passa pels punts mitjans dels segments que uneixen els vèrtexs d'un triangle amb l'ortocentre (per aquesta raó el cercle d'Euler s'anomena també *cercle dels nou punts* del triangle; figura 31).

GE22. Sigui P un punt, ABC un triangle i X, Y, Z els peus de les perpendiculars per P als costats BC, CA i AB , respectivament. Demostreu que X, Y i Z estan alineats si i només si P està sobre la circumferència circumscrita de ABC (en aquest cas, la recta que conté els punts X, Y i Z s'anomena *recta de Simson* de P relativa al triangle ABC ; vegeu la figura 32).

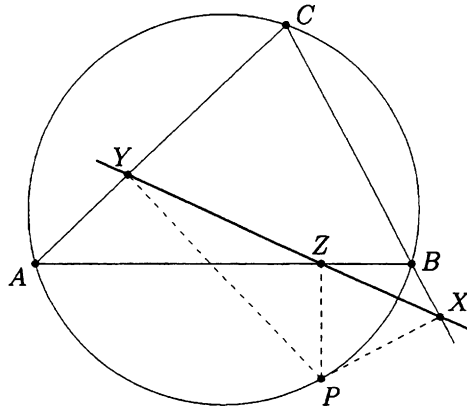


Figura 32: *Recta de Simson*

GE23 (Problema de Fagnano). Demostreu que el mínim perímetre d'un triangle inscrit en un triangle acutangle donat és el del triangle òrtic (vegeu la figura 5).

GE24. Trobeu el punt interior d'un triangle acutangle tal que la suma de les seves distàncies als vèrtexs sigui mínima (*punt de Fermat* del triangle).

GE25. Demostreu que les circumferències circumscrites dels triangles equilàters construïts sobre els tres costats d'un triangle, al seu exterior, passen pel punt de Fermat. A més a més, els centres d'aquests tres triangles formen un altre triangle equilàter.

GE26 (Teorema de Ptolemeu). En un quadrilàter convex la suma dels productes de les dues parelles de costats oposats és no inferior al producte de les dues diagonals, i la igualtat val si i només si el quadrilàter és inscriptible.

GE27. Sigui ABC un triangle isòsceles amb BC com a costat desigual. Sigui Q el peu de l'altura pel vèrtex B i P el peu de la perpendicular a BC per Q . Trobeu l'àrea del triangle en funció de $x = BP$ i $y = PC$.

GE28. En un triangle ABC escollim punts X , Y i Z sobre els costats BC , CA i AB , respectivament. Considerem les rectes per X , Y i Z que són perpendiculars a BC , CA i AB , respectivament. Proveu que les tres rectes són concurrents si i només si $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$.

GE29. Sigui O el centre d'una circumferència K , AB un diàmetre, t la recta tangent a K en el punt B . Donat un punt P de K diferent de A i B , siguin C i D els punts d'intersecció amb t de la tangent a K pel punt P i de la recta AP . Proveu que $BC = CD$.

Geometria

GE30. Trobeu l'àrea d'un octògon convex inscrit en una circumferència sabent que té quatre costats consecutius de longitud 2 i els altres quatre de longitud 3.

GE31. Siguin P i O punts fixos. Trobeu el lloc geomètric del simètric de P respecte d'una recta variable per O .

GE32. Sigui H l'ortocentre d'un triangle, P el peu d'una altura i Q el punt d'intersecció de la semirecta HP amb el cercle circumscrit. Demostreu que $HP = PQ$.

GE33. Proveu que el baricentre d'un triangle ABC és el punt G del segment HO tal que $GO = \frac{1}{2}GH$ i que el punt mitjà de HO és el centre de la circumferència circumscrita en el triangle $A'B'C'$ els vèrtexs del qual són els punts mitjans dels costats de ABC (la recta HO s'anomena *recta d'Euler* del triangle ABC ; vegeu la figura 33).

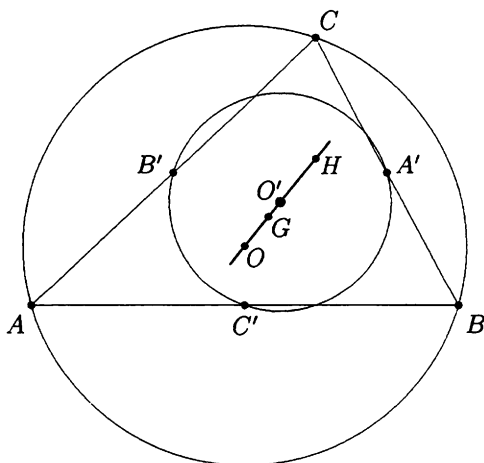


Figura 33: *Recta d'Euler*

GE34. Si la recta d'Euler d'un triangle passa per un dels vèrtexs, el triangle és rectangle o isòsceles.

GE35. Amb les notacions de la figura 31, sigui P' el punt de l'arc $A'P$ del cercle d'Euler tal que $\text{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\text{arc}(A'P)$. Definim Q' i R' de manera similar. Demostreu que llavors el triangle $P'Q'R'$ és equilàter (figura 44).

GE36. Siguin A i B dos punts no diametralment oposats d'un cercle C donat i sigui XY un diàmetre variable de C . Determineu el lloc geomètric del punt d'intersecció de les rectes AX i BY .

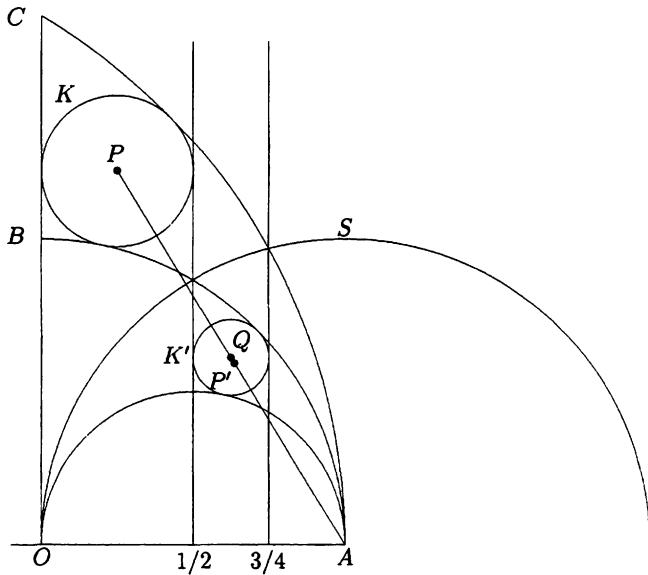


Figura 34: Una aplicació de les inversions

GE37 (Erdős–Mordell). Sigui E un punt a l'interior d'un triangle ABC , s la suma de les distàncies de E als vèrtexs i t la suma de les distàncies de E als peus de les rectes per E perpendiculars als costats. Demostreu que $s \geq 2t$.

GE38. Sigui E un punt interior d'un triangle ABC . Siguin x, y i z les distàncies de E als vèrtexs A, B i C , respectivament, i p, q i r les distàncies de E als costats BC, CA i AB , respectivament. Llavors,

$$xyz \geq (p+q)(p+r)(q+r).$$

GE39. Siguin S i K circumferències diferents. Demostreu que K és doble per la inversió respecte de S si i només si K i S són ortogonals.

GE40. A la figura 34, l'arc AB és un quadrant de la circumferència de centre O i radi $|OA| = 1$, i AC és l'arc que correspon a la circumferència de radi 2 amb centre en el punt simètric de A respecte del punt O . Comproveu que K i K' són circumferències inverses respecte de la circumferència S de centre A i radi 1. Si P' és l'invers de A respecte de K' , proveu que P' i el centre P de K són inversos respecte de S . Trobeu també la posició del centre Q de K' (i noteu que Q i P' són diferents).

GE41. Siguin P i A dos punts diferents donats i O un punt variable en una semirecta σ d'origen A donada. Sigui S la circumferència de centre O i radi $|OA|$ i P' l'invers de P respecte de S . Sigui L la recta perpendicular a σ pel punt A . Demostreu que el límit de

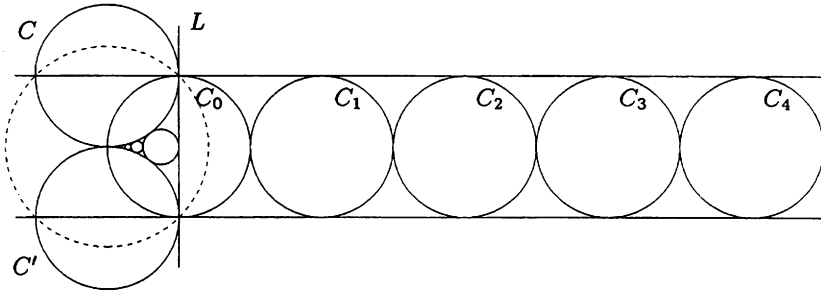


Figura 35: Càlcul del diàmetre de les circumferències entre L , C i C'

P' quan O s'allunya indefinidament de A és el punt simètric de P respecte de la recta L (si mirem L com el límit de S quan O s'allunya indefinidament de A , veiem que podem considerar la simetria respecte de L com el límit de la inversió respecte de S).

GE42. Sigui S una circumferència de centre O , i P i P' dos punts no pertanyents a S i diferents de O . Demostreu que les condicions següents són equivalents:

- 1) P i P' són inversos respecte de S .
- 2) P i P' estan alineats amb O i existeix una circumferència K ortogonal a S que passa per P i P' .
- 3) Existeixen dues circumferències distintes K i K' que passen per P i P' i són ortogonals a S .

GE43. Sigui S una circumferència de centre O , L una recta que no passa per O i $C = L'$ la circumferència inversa de L respecte de S . Demostreu que si P i Q són punts simètrics respecte de L , llavors els inversos P' i Q' de P i Q respecte de S són inversos respecte de C (és a dir, la simetria respecte de L i la inversió respecte de C es corresponen per la inversió respecte de S).

GE44. Considerem la figura 35, en la qual C i C' són dues circumferències tangents del mateix radi R . La recta L és una tangent comuna a C i C' i les circumferències C'_n ($n \geq 1$) es determinen de manera que estiguin contingudes a la regió entre L , C i C' i que C'_n sigui tangent a C'_{n-1} , C i C' (convenim que $C'_0 = L$). Comproveu que C'_n és la inversa de C_n respecte de la circumferència puntejada i useu aquest fet per demostrar que el diàmetre de C'_n és igual a $R/n(n+1)$ (la circumferència puntejada és la que passa pels punts de contacte de L amb C i C' i que té per centre el punt de contacte de C i C').

GE45. A la figura 36, la circumferència C' és interior, i tangent en el punt B , a la circumferència C i les circumferències $C_0, C_1, \dots$ es construeixen tal com indica la figura. Proveu que

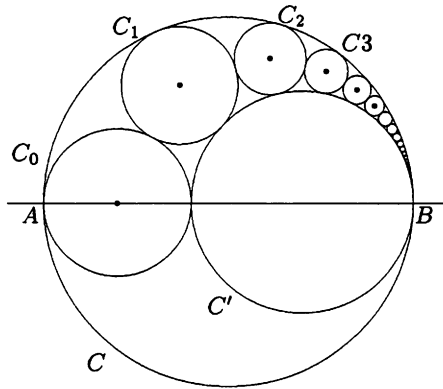


Figura 36: Quin diàmetre té C_n ?

el diàmetre de C_n ($n \geq 1$) és igual a y_n/n , on y_n és la distància del centre de C_n a la recta AB (indicació: trobeu les inverses de $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n$ respecte de la circumferència de centre B que és ortogonal a C_n).

4 La Raquel i en Pau resolen problemes

En aquesta secció donem les solucions, en forma dialogada, de cinc problemes de la llista (GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35). Ens hem decidit a emprar aquest mitjà perquè ens ha semblat adient per intentar explicar, a més a més de la solució, algunes idees i processos que ens semblen rellevants per a la resolució de problemes de geometria. Les solucions convencionals dels mateixos problemes, que són les que, en definitiva, s'exigeixen, les podeu trobar a la secció 5.

Als diàlegs, en Pau i la Raquel són estudiants dedicats a la tasca d'aprendre a resoldre problemes de geometria. A l'aula de ciència-ficció on treballen, l'Ariadna, una terminal de darreríssima generació, segueix atentament els seus passos. Ocasionalment, quan ho creu oportú, fa que l'Euclides, un dels seus mòduls més avançats, ajudi els estudiants a retrobar el fil de les seves disquisicions. Per a aprofitar de manera òptima les cavil·lacions de l'Euclides, convé remarcar que té dos modes de funcionament. Un, que podem qualificar de *declaratiu*, imita el procés de «síntesi» dels antics grecs, és a dir, enuncia conclusions que s'obtenen directament de les proposicions generades fins al moment mitjançant coneixements establerts (i generalment coneguts). L'altre, que podem qualificar d'*interrogatiu*, imita el procés d'«anàlisi» en el sentit dels antics, és a dir, fa *preguntes clau* amb les quals usualment es redueixen a un curt nombre els coneixements que cal posar en joc per intentar aconseguir l'objectiu del problema. Com veurem, els estudiants aprenen ràpidament les tècniques de resolució de problemes, i progressivament l'ajut que necessiten de l'Euclides es fa més esporàdic

i considerablement més sofisticat.

Problema GE6

Després de llegir l'enunciat, en Pau i la Raquel dibuixen la figura 37. Recorden molt bé que a l'inici de les classes el professor els va dir que, quan es tracta de resoldre problemes de geometria, un dibuix pot ésser decisiu. Amb tot això, però, és el primer problema, estan una mica cohibits i no saben ben bé com començar. Veient la situació, l'Ariadna sollicita a l'Euclides que els ajudi.

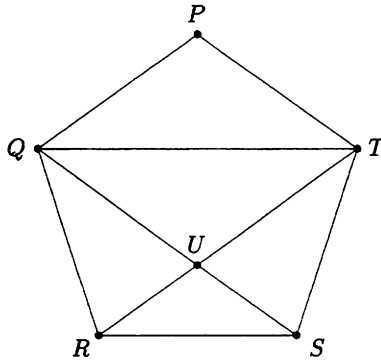


Figura 37: El pentàgon i la raó àuria

EUCLIDES: El quadrilàter $PQUT$ és un paral·lelogram.

RAQUEL: Té raó, la diagonal QS és paral·lela al costat PT i la diagonal TR és paral·lela al costat PQ .

EUCLIDES: El quadrilàter $PQUT$ és un rombe.

PAU: És clar, $PT = PQ$ perquè el pentàgon és regular.

EUCLIDES: Així $QU = PT$.

RAQUEL: Obvi.

EUCLIDES: Per tant, $QS - PT = QS - QU = US$.

P. I R.: Evident.

EUCLIDES: Els triangles QTU i RUS són semblants.

RAQUEL: Ja ho veig, podem aplicar el criteri AAA de semblança.

PAU: El que diu que dos triangles són semblants quan tenen els tres angles iguals?

RAQUEL: Sí, si no ho recordo malament.

L'Euclides ha aprofitat aquests instants per acabar la seva tasca i descarrega dues línies de símbols:

EUCLIDES: Per tant $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$. I com que $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$, pel que ja hem vist, obtenim que $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$.

Passen els moments i L'Euclides ja no diu res més.

R. i P.: I...?

EUCLIDES: Què volíeu demostrar?

PAU: Que el costat del pentàgon regular és segment auri de la diagonal.

EUCLIDES: I això què vol dir?

RAQUEL: Segons la definició, que si a és la diagonal i x el costat, llavors $a/x = x/(a-x)$.

EUCLIDES: I fins on hem arribat en mode directe?

L'Euclides diu «mode directe» al que nosaltres n'hem dit «declaratiu», i diu «mode invers» al que n'hem dit «interrogatiu», això és, el que ha emprat després de «I...?»

PAU: Fins a la relació $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$.

R. i P.: Ah, ja ho veiem! Efectivament s'ha establert que el costat PT és segment auri de la diagonal QS , i això acaba la prova!

Problema GE16

Ariadna també sol·licita l'ajuda de l'Euclides, que comença en mode interrogatiu.

EUCLIDES: Quina mena de coses us demanen?

PAU: No entenc què vol dir.

RAQUEL: Jo crec que ho sé: hem de demostrar que es compleixen unes certes desigualtats.

EUCLIDES: Magnífic. Desigualtats..., entre què?

PAU: Entre distàncies.

EUCLIDES: Excel·lent. I de què disposeu per demostrar desigualtats entre distàncies?

PAU: Jo només conec la desigualtat triangular.

EUCLIDES: Pots enunciar-la?

PAU: Sí: en un triangle, tot costat és inferior a la suma dels altres dos.

EUCLIDES: I com podríem intentar aplicar-la a les desigualtats que ens demanen?

En Pau i la Raquel pensen un moment. No saben ben bé què dir. L'Euclides hi intervé, en mode declaratiu, per facilitar-los la tasca.

EUCLIDES: El problema demana dues desigualtats; en realitat estem en presència de dos problemes.

RAQUEL: Hauríem de fer un dibuix.

Geometria

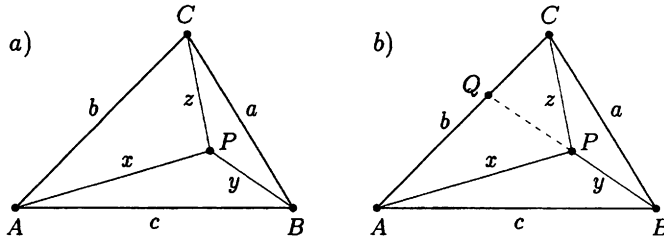


Figura 38: Figures usades per resoldre el problema 16

Amb un no res dibuixen la figura 38.a.

RAQUEL: Si posem $2p$ per denotar el perímetre de ABC , hem de veure, d'una banda, que $p < x + y + z$, i, de l'altra, que $x + y + z < 2p$.

EUCLIDES: Us faré una pregunta més explícita que l'anterior: com podeu usar la desigualtat triangular per establir $p < x + y + z$?

PAU: Hauríem de cercar triangles, a la figura 38.a, en els que un costat estés relacionat amb el perímetre i els altres dos amb els segments x , y i z .

RAQUEL: Els triangles PAB , PBC i PCA , per exemple?

PAU: Sí, per exemple. La desigualtat triangular, aplicada a PAB , ens dona $c < x + y$.

RAQUEL: I aplicada als altres dos ens dona, anàlogament, $a < y + z$ i $b < z + x$.

PAU: Sumant les tres desigualtats tenim $a + b + c < 2x + 2y + 2z$.

RAQUEL: I com que $a + b + c = 2p$, en resulta que $p < x + y + z$, com volíem demostrar.

EUCLIDES: Heu demostrat una part del problema 16.

PAU: L'altra part era la desigualtat $x + y + z < 2p$.

RAQUEL: Si intentem de prosseguir l'anàlisi de l'Euclides, ara ens hauríem de preguntar com podem usar la desigualtat triangular per establir $x + y + z < 2p$.

PAU: Com en el cas anterior, hauríem de cercar triangles en els quals, a la inversa d'abans, un costat estigui relacionat amb els segments x , y i z , i els altres dos, amb el perímetre.

Miren la figura 38.a i no aconsegueixen veure cap triangle que compleixi el que volen. Per un moment no saben què fer. Tot d'una, però, la Raquel té un idea; li sembla bona i això l'empeny a explicar les seves conseqüències sense pausa:

RAQUEL: No ens cal la desigualtat triangular: és evident que $x + y < b + a$; anàlogament, $y + z < c + b$ i $z + x < a + c$; sumant, $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$, és a dir, $x + y + z < 2p$. I ja està, hem acabat!

PAU: Això ha estat brillant, Raquel. Però... com veus que $x + y < a + b$?

RAQUEL: Hum!

PAU: Com que és una desigualtat entre distàncies, potser el que hem d'intentar és provar-la aplicant de nou la desigualtat triangular.

RAQUEL: Tens raó; ja ens hem convençut que és l'única eina que coneixem per intentar resoldre aquesta mena de qüestions.

En Pau completa la figura 38.a fins a obtenir la figura 38.b.

PAU: Crec que ja ho tenim. Fixa-t'hi: $x < AQ + QP$, per la desigualtat triangular; per tant $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB$; ara $QB < QC + CB$, altra cop per la desigualtat triangular, d'on $AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$. Per tant, $x + y < b + a$.

RAQUEL: Efectivament. I així sí que la demostració és completa!

Problema GE17

Abans de passar a intentar resoldre el problema 17, en Pau i la Raquel llegeixen el seu enunciat amb molta cura i dibuixen la figura 39.a.

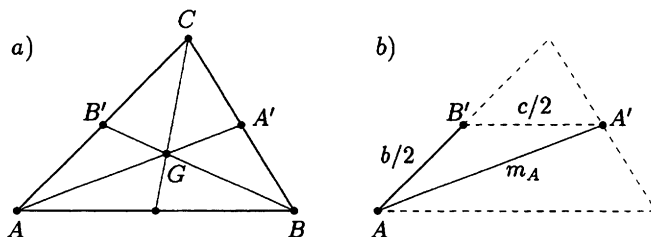


Figura 39: Figures usades per resoldre el problema 17

PAU: Em pregunto si el problema anterior, aplicat al baricentre G , ens donaria alguna cosa.

RAQUEL: Podem provar-ho. Només ens caldria saber el valor de $x + y + z$ [amb les notacions del problema anterior i amb $P = G$] en termes de μ [la suma de les tres mitjanes].

PAU: Això és fàcil. Sabem que $AG = \frac{2}{3}AA'$, on A' és el punt mitjà de BC . En altres paraules, $x = \frac{2}{3}m_A$, on m_A és la mitjana corresponent al vèrtex A . Per tant $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$.

RAQUEL: I com que $p < x + y + z$ (pel problema 16), resulta que $p < \frac{2}{3}\mu$.

PAU: Que és equivalent a $\frac{3}{2}p < \mu$, la primera de les relacions que volem demostrar. Què passarà amb la segona?

RAQUEL: Si apliquem la segona desigualtat del problema anterior, obtenim $\frac{2}{3}\mu < 2p$.

PAU: Però el que volem és $\mu < 2p$. I $\mu < 2p$ és més forta que $\frac{2}{3}\mu < 2p$.

Geometria

RAQUEL: Perquè $\frac{2}{3}\mu < \mu$, oi? Què hi farem! Haurem d'investigar una altra via.

PAU: Podem intentar aplicar la desigualtat triangular una altra vegada.

RAQUEL: Bona idea! Pel que hem après fins ara, ens cal trobar triangles amb un costat relacionat amb μ , i els altres dos, amb el perímetre.

Pensen una mica. Al final dibuixen la figura 39.b.

PAU: Com que $A'B' = c/2$, el triangle $AA'B'$ té un costat, AA' , que és la mitjana m_A , mentre que els altres dos costats són iguals a $c/2$ i $b/2$.

RAQUEL: Ergo, $m_A < c/2 + b/2$. Anàlogament tenim $m_B < a/2 + c/2$ i $m_C < b/2 + a/2$.

PAU: I sumant, $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$.

La Raquel i en Pau es disposen a celebrar l'èxit. Encara no han tingut temps de començar, quan l'Euclides pregunta:

EUCLIDES: Creieu que les desigualtats obtingudes son òptimes?

L'interès amb què reben aquesta qüestió no els priva de prendre's un descans.

Consignem aquí només que quan van tornar a la qüestió es van adonar de les coses següents. Al problema 16, si fem $P = C$, llavors $x + y + z = a + b + 0$. Per tant, si fem que c sigui cada vegada més petit, llavors $2p = a + b + c$ tendeix a $a + b = x + y + z$, i per tant la desigualtat $x + y + z < 2p$ no es pot millorar. Per altra banda, si fem $P = A$ i fem tendir c a 0, llavors $x + y + z = 0 + a + c$ tendeix a a i $p = (a + b + c)/2$ tendeix a $(2a)/2 = a$, amb la qual cosa es veu que la desigualtat $p < x + y + z$ tampoc no es pot millorar. Pel que fa al problema 17, es van adonar, considerant un triangle amb c cada vegada més petit, que la desigualtat $\mu < 2p$ no es pot millorar, i considerant un triangle en el que C tendeix al punt mitjà de AB , que tampoc no es pot millorar la desigualtat $\frac{3}{2}p < \mu$.

Problema GE23

EUCLIDES: Què ens demanen?

RAQUEL: Demostrar que el triangle òrtic d'un triangle donat és el que té el perímetre més petit entre tots els triangles inscrits al primer.

PAU: És a dir, es tracta de veure que una certa longitud és mínima entre les que satisfan unes certes condicions.

EUCLIDES: Quins enunciats coneixeu que permetin concloure que una longitud és mínima?

RAQUEL: Jo només conec que entre totes les corbes que uneixen dos punts, la recta és la que té longitud menor.

EUCLIDES: Podríem usar aquest coneixement per determinar si un triangle inscrit té perímetre mínim?

PAU: No ho veig pas fàcil, ja que el triangle és una línia tancada.

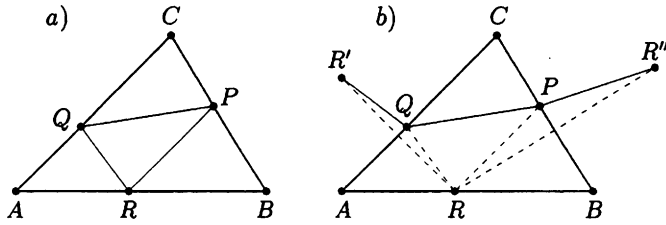


Figura 40: Resolució del problema de Fagnano

Fan una pausa per dibuixar la figura 40.a.

RAQUEL: Potser podríem obrir-lo [el triangle PQR]; obrir-lo d'alguna manera que ens fos útil.

PAU: Genial! Potser una manera d'aconseguir-ho sigui canviar els costats QR i PR pels seus simètrics QR' i QR'' respecte dels costats AC i BC .

RAQUEL: Vegem quin aspecte tindria fent una figura.

Dibuixen la figura 40.b.

RAQUEL: La línia $R'QPR''$ té, doncs, la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit PQR .

PAU: Sí, és clar; per les propietats de les simetries sabem que $R'Q = RQ$ i $R''P = RP$.

RAQUEL: A més a més, R' i R'' no depenen en absolut de P i Q ; només depenen de la posició de R .

PAU: Ja veig com usar la propietat de la línia recta!

En Pau dibuixa la figura 41.a, mentre explica:

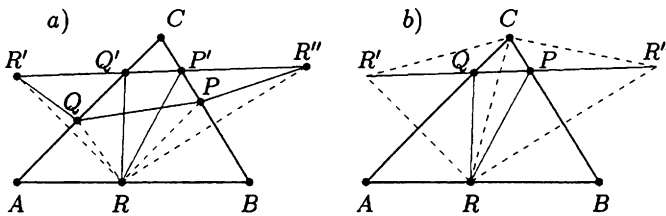


Figura 41: Resolució del problema de Fagnano (continuació)

PAU: Si considerem el segment $R'R''$, i aquest talla els segments AC i BC en els punts Q' i P' , llavors $R'R''$ és el perímetre del triangle $P'Q'R$. I com que $R'R''$ és més curt que $R'QPR''$ (o igual, si per casualitat fos $Q' = Q$ i $P' = P$), el triangle $P'Q'R$ té el perímetre més petit (o igual) que PQR . De fet, és el de perímetre més petit sempre que mantinguem R fix.

Geometria

RAQUEL: Ara hauríem de veure, doncs, per quin punt R el segment $R'R''$ té longitud mínima, ja que llavors el triangle $P'Q'R$ serà la solució del problema.

En Pau i la Raquel romanen en silenci. No veuen què poden fer. Han arribat fins aquí ajudats per l'Euclides en mode invers. Perquè puguin seguir, l'Euclides canvia súbitament a mode directe.

EUCLIDES: El triangle $CR'R''$ és isòsceles.

RAQUEL: Per què?

EUCLIDES: $CR' = CR = CR''$ per les propietats de la simetries.

Per poder seguir, dibuixen la figura 41.b. Decideixen oblidar-se dels punts P i Q del triangle inscrit inicial i usar les lletres P i Q per designar els punts que abans eren P' i Q' .

PAU: De fet, doncs, $CR'R$ i CRR'' també són isòsceles.

RAQUEL: A més, CA i CB són les altures dels dos darrers triangles respecte del vèrtex C .

PAU: En resulta que l'angle $\widehat{R'CR''}$ és el doble de l'angle $\widehat{ACB}$. Com que aquest darrer és fix, $\widehat{R'CR''}$ també és fix; vull dir que no depèn de R .

RAQUEL: Tenim un triangle isòsceles, $R'CR''$, volem minimitzar la seva base $R'R''$, i sabem que l'angle oposat a la base és constant.

PAU: Sota aquestes condicions, la base serà mínima quan els costats (que són iguals) siguin mínims.

RAQUEL: Com que els costats són iguals a CR , la base $R'R''$ serà mínima quan el segment CR ho sigui.

PAU: Fantàstic! CR és mínim quan R és el peu de l'altura respecte del vèrtex C !

RAQUEL: Per tant, el triangle inscrit de perímetre mínim és tal que R és el peu de l'altura i P i Q es construeixen com ja s'ha indicat.

PAU: Com que el paper de R en les consideracions anteriors el podrien haver fet P o Q , realment P i Q també són els peus de les corresponents altures.

RAQUEL: De fet, hem demostrat, doncs, que el triangle inscrit de perímetre mínim és el triangle òrtic, i que els simètrics d'un vèrtex del triangle òrtic respecte dels dos costats que no el contenen estan alineats amb els altres dos vèrtexs (del triangle òrtic).

PAU: És ben curiós!

Mentre celebren alegrement aquestes excel·lents conclusions...

EUCLIDES: On heu usat la hipòtesi que el triangle és acutangle? És, aquesta hipòtesi, indispensable? Podríeu usar la vostra conclusió per resoldre el problema 19?

Problema GE35

La Raquel i en Pau recorden que el cercle dels nou punts és el cercle $A'B'C'$, on A', B', C' són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat «d'Euler», passa pels peus P, Q, R de les altures i pels punts mitjans A'', B'', C'' dels segments HA, HB, HC . També recorden, pel que han vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre G , el baricentre, transforma el cercle circumscrit ABC en $A'B'C'$. Abans de decidir què fer, dibuixen la figura 42 (s'ho arrangeu de manera que $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$). D'acord amb l'enunciat, el punt P' de l'arc $A'P$ es defineix de manera que l'arc $A'P' = \frac{1}{3}A'P$; i els punts Q' i R' es defineixen de manera similar.

RAQUEL: Volem veure que $P'Q'R'$ és un triangle equilàter.

PAU: Segur que aquí l'Euclides preguntaria: Com podem veure que un triangle és equilàter?

RAQUEL: Una manera de fer-ho és aplicar la definició: un triangle és equilàter quan els seus tres costats són iguals. També n'hi ha prou veient que els seus tres angles són iguals (necessàriament d'amplitud $\pi/3$). El que encara no veig és com aplicar algun d'aquests criteris al problema.

PAU: Atès que $P'Q'R'$ estan sobre el cercle d'Euler, potser el segon criteri aniria millor.

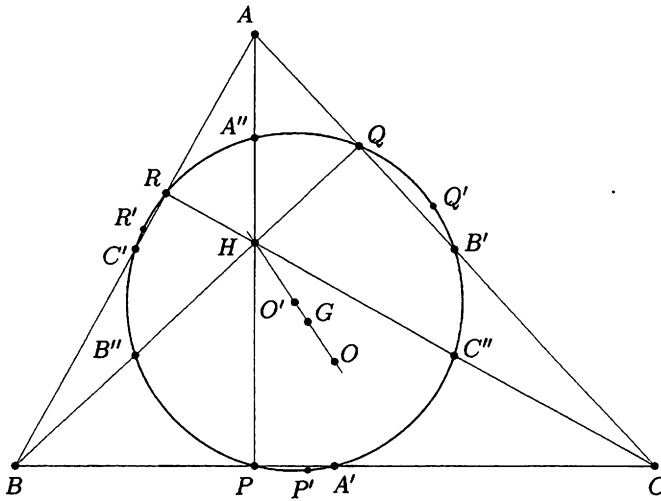


Figura 42: Punts P', Q', R' del cercle d'Euler

RAQUEL: A mi també m'ho sembla. Hauríem de veure que, en el triangle $P'Q'R'$, els angles $\hat{P}', \hat{Q}'$ i $\hat{R}'$ tenen amplitud $\pi/3$.

PAU: Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs $P'Q', Q'R'$ i $R'P'$ sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de $2\pi/3$ radians.

Geometria

RAQUEL: Potser no serà tan difícil com podia semblar. Sobre el cercle d'Euler hi tenim ara 12 punts i potser ens aniria bé, abans de seguir, de deduir les amplituds d'alguns dels arcs entre aquests punts.

PAU: Em sembla bé. Els arcs $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$, per exemple, són fàcils: les seves amplituds són les mateixes que les dels arcs AB , BC i CA sobre el cercle circumscrit ABC , és a dir, iguals a $2\widehat{C}$, $2\widehat{A}$ i $2\widehat{B}$.

RAQUEL: Suposo que la primera afirmació que fas prové de l'homotècia que transforma ABC en $A'B'C'$, i que la segona surt directament del que sabem d'angles inscrits.

PAU: Efectivament.

$$A'B' = 2\widehat{C}, \quad B'C' = 2\widehat{A}, \quad C'A' = 2\widehat{B}.$$

Ara ja no en veig cap més.

RAQUEL: Jo veig una relació que potser ens pot donar quelcom més. Fixa-t'hi [mentre ho diu, dibuxa la figura 43]: Com que A' és el punt mitjà de BC i C'' el punt mitjà de BH , resulta que $A'C''$ és paral·lela a l'altura BH .

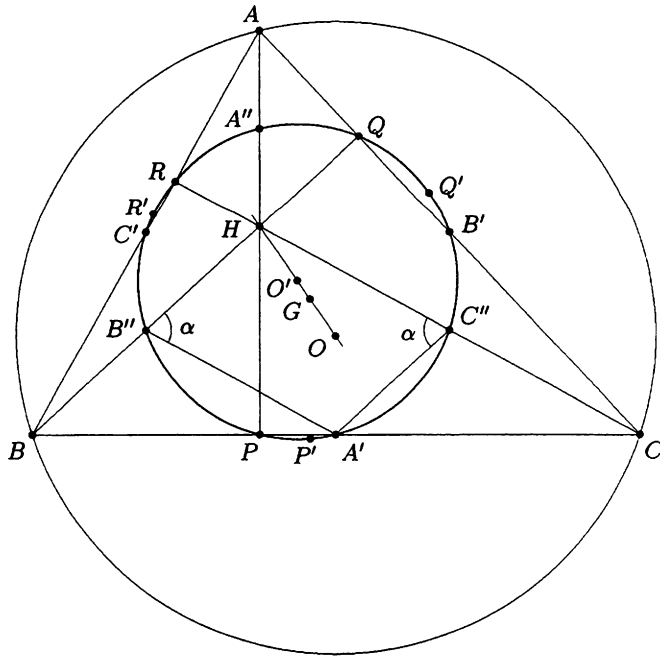


Figura 43: Determinació d'angles centrals sobre el cercle d'Euler

PAU: Anàlogament $A'B''$ és paral·lela a l'altura CR , etc.

RAQUEL: I així $A'C''HB''$ és un paral·lelogram.

PAU: I tot això què té a veure amb els angles?

La Raquel posa la lletra α a l'angle $\widehat{A'C''H}$ i a l'angle $\widehat{HB''A'}$.

RAQUEL: Són iguals perquè són angles oposats en un paral·lelogram.

PAU: Ja ho veig. Per angles inscrits altra vegada, 2α és igual a l'arc $A'C'R$ i també a l'arc $A'B'Q$.

RAQUEL: Els costats $C''A'$ i $C''H$ de l'angle $\widehat{A'C''H}$ són perpendiculars, respectivament, als costats AC i AB . Per tant, de fet, $\alpha = \hat{A}$.

PAU: Un gran pas: ara ja tenim que l'amplitud dels arcs $A'B'Q$ i $A'C'R$ és igual a $2\hat{A}$.

RAQUEL: I per diferència [$B'Q = A'Q - A'B'$ i $C'R = A'R - A'C'$] obtenim que $B'Q = 2\hat{A} - 2\hat{C}$ i $C'R = 2\hat{A} - 2\hat{B}$. Anàlogament, serà $A'P = 2\hat{B} - 2\hat{C}$. És a dir,

$$B'Q = 2\hat{A} - 2\hat{C}, C'R = 2\hat{A} - 2\hat{B}, A'P = 2\hat{B} - 2\hat{C}.$$

PAU: Ara ja podem calcular l'arc $P'Q'$:

$$\begin{aligned} P'Q' &= \frac{1}{3}A'P + A'B' + \frac{1}{3}B'Q \\ &= \frac{2}{3}(\hat{B} - \hat{C}) + 2\hat{C} + \frac{2}{3}(\hat{A} - \hat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que $Q'R' = \frac{2\pi}{3}$ i $R'P' = \frac{2\pi}{3}$, es veu de manera anàloga.

En Pau i la Raquel dibuixen la figura 44, simplement per gaudir de veure amb imatges el que han vist abans amb els ulls de la geometria. Abans de tenir temps de tancar la teminal i els quaderns, l'Euclides té temps de generar una pregunta.

EUCLIDES: Què en podeu dir de les tres parelles d'arcs $A'C''$ i $B'C''$, PB'' i $C'B''$, QA'' i RA'' ?

Podem transcriure breument que la Raquel i en Pau van veure ràpidament, usant que les altures són bisectrius del triangle òrtic, que $RA'' = QA''$ i, usant el treball fet en el darrer problema, que $RA'' = QA'' = \pi - 2\hat{A}$. Anàlogament $PB'' = RB'' = \pi - 2\hat{B}$ i $PC'' = QC'' = \pi - 2\hat{C}$. Això, i de nou amb els resultats del primer problema, els permet veure que $B'C'' = C'B'' = \pi - 2\hat{A}$ i $A'C'' = PB'' = \pi - 2\hat{B}$.

5 Mostra de solucions

En aquesta secció s'inclouen solucions convencionals dels problemes GE6, GE16, GE17, GE23 i GE35. Aquestes mateixes solucions les podeu trobar exposades en forma dialogada

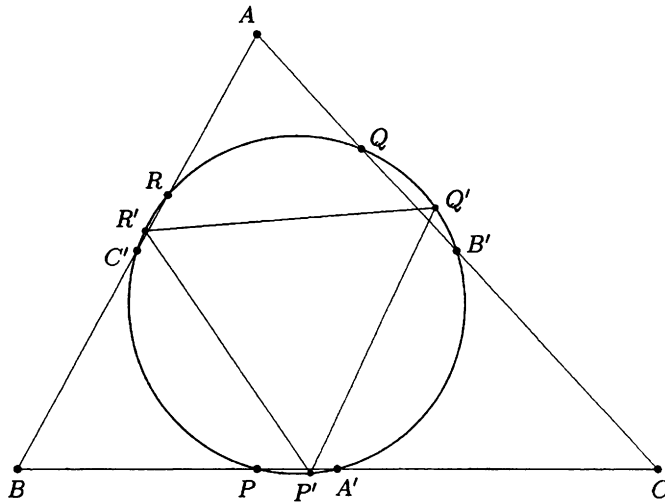


Figura 44: El triangle equilàter $P'Q'R'$

a la secció 4, la qual cosa pot tenir interès pels lectors que vulguin reflexionar amb més deteniment sobre el procés de resolució de problemes.

Problema GE6

Considerem la figura 37 (pàg. 114). El quadrilàter $PQUT$ és un rombe, ja que la diagonal QS és paral·lela al costat PT , la diagonal TR és paral·lela al costat PQ i $PT = PQ$ (perquè el pentàgon és regular). Així $QU = PT$, d'on resulta que $QS - PT = QS - QU = US$.

Per altra banda, els triangles QTU i RUS són semblants (criteri AAA de semblança). Per tant $\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \frac{QS}{PT}$. I com que $\frac{QU}{US} = \frac{PT}{QS-PT}$, pel que ja hem vist, obtenim que $\frac{QS}{PT} = \frac{PT}{QS-PT}$. Per tant, el costat PT és segment auri de la diagonal QS , per la definició de segment auri.

Problema GE16

Com que ens demanen que demostrem dues desigualtats entre distàncies, intentarem aplicar la desigualtat triangular. Amb les notacions de la figura 38.a, si posem $2p$ per denotar el perímetre de ABC , hem de veure, d'una banda, que $p < x + y + z$, i, de l'altra, que $x + y + z < 2p$.

Per establir que $p < x + y + z$, fixem-nos en els triangles PAB , PBC i PCA . La desigualtat triangular, aplicada a PAB , ens dóna $c < x + y$. Anàlogament, $a < y + z$ i $b < z + x$. Sumant les tres desigualtats tenim $a + b + c < 2x + 2y + 2z$. Com que $a + b + c = 2p$, en resulta que $p < x + y + z$.

Manca veure la desigualtat $x + y + z < 2p$. Considerem la figura 38.b. Aplicant la desigualtat triangular obtenim: $x + y < AQ + QP + y = AQ + QB < AQ + QC + CB = AC + CB = b + a$. Anàlogament, $y + z < c + b$ i $z + x < a + c$; sumant, $2x + 2y + 2z < 2a + 2b + 2c$, és a dir, $x + y + z < 2p$.

Problema GE17

El problema 16, aplicat al baricentre G , ens dona la primera desigualtat. En efecte, amb les notacions de la figura 39.a, sabem que $AG = \frac{2}{3}AA'$, on A' és el punt mitjà de BC . En altres paraules, $x = \frac{2}{3}m_A$, on m_A és la mitjana corresponent al vèrtex A . Per tant $x + y + z = \frac{2}{3}\mu$. Com que $p < x + y + z$ (pel problema 16), resulta que $p < \frac{2}{3}\mu$, que és equivalent a $\frac{3}{2}p < \mu$. Val a remarcar que si apliquem la segona desigualtat del problema 16, obtenim $\frac{2}{3}\mu < 2p$, que és una desigualtat més feble que la desigualtat $\mu < 2p$ que volem demostrar.

Per veure que $\mu < 2p$, considerem la figura 39.b. Com que $A'B' = c/2$, el triangle $AA'B'$ té un costat, AA' , que és la mitjana m_A , mentre que els altres dos costats són iguals a $c/2$ i $b/2$. Per tant, $m_A < c/2 + b/2$. Anàlogament, tenim $m_B < a/2 + c/2$ i $m_C < b/2 + a/2$. Si ara sumem aquestes tres desigualtats, obtenim $\mu < 2(a/2 + b/2 + c/2) = 2p$.

Problema GE23

Considerem la figura 40.a. Volem veure que PQR té perímetre mínim si i només si PQR és el triangle òrtic de ABC . Siguin R' i R'' els simètrics del punt R respecte dels costats AC i BC , respectivament (figura 40.b). La línia $R'QPR''$ té la mateixa longitud que el perímetre del triangle inscrit PQR . Si considerem els punts d'intersecció, Q' i P' , de $R'R''$ amb els costats AC i BC , respectivament (figura 41.a), llavors el perímetre de $P'Q'R$ és igual a $R'R''$. Com que la longitud de $R'R''$ és inferior (o igual) a la longitud de la línia $R'QPR''$, veiem que el triangle $P'Q'R$ és el de perímetre més petit entre tots els triangles inscrits PQR (amb R fix). Ara ens cal veure per quin punt R del costat AB té el segment $R'R''$ longitud mínima, ja que llavors el triangle $P'Q'R$ serà la solució del problema.

Remarquem que el triangle $CR'R''$ és isòsceles ($CR' = CR = CR''$ per les propietats de la simetries; vegeu la figura 41.b). De fet, $CR'R$ i CRR'' també són isòsceles i CA i CB són perpendiculars a RR' i RR'' . En resulta que l'angle $\widehat{R'CR''}$ és el doble de l'angle $\widehat{ACB}$. Com que aquest darrer és fix, $\widehat{R'CR''}$ també és fix (és a dir, no depèn de R). Per tant la base $R'R''$ del triangle isòsceles $R'CR''$ té longitud mínima si i només si els seus costats tenen longitud mínima. Però com que els costats són iguals a CR , la base $R'R''$ serà mínima quan el segment CR ho sigui, és a dir, si i només si R és el peu de l'altura del vèrtex C . Anàlogament, es veuria que P i Q han de ser els peus de les altures de A i B , respectivament.

Problema GE35

Recordem que el cercle dels nou punts és el cercle $A'B'C'$, on A', B', C' són els punts mitjans dels costats, i que aquest cercle, també anomenat *d'Euler*, passa pels peus P, Q, R de les altures i pels punts mitjans A'', B'', C'' dels segments HA, HB, HC . Recordem també, pel que hem vist en problemes anteriors, que l'homotècia de centre G (el baricentre), transforma el cercle circumscrit ABC en $A'B'C'$.

Considerem la figura 42 (suposarem que $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$). D'acord amb l'enunciat, el punt P' de l'arc $A'P$ es defineix de manera que l'arc $\text{arc}(A'P') = \frac{1}{3}\text{arc}(A'P)$; i els punts Q' i R' es defineixen de manera similar. Volem veure que $P'Q'R'$ és un triangle equilàter, per la qual cosa és suficient veure que els angles $\widehat{P'Q'R'}$ i $\widehat{P'}$ (del triangle $P'Q'R'$) tenen amplitud $\pi/3$. Com que aquests angles estan inscrits al cercle d'Euler, això és equivalent a dir que els arcs $P'Q', Q'R'$ i $R'P'$ sobre el cercle d'Euler tenen una amplitud de $2\pi/3$ radians.

Les amplituds dels arcs $A'B', B'C'$ i $C'A'$ coincideixen amb les dels arcs AB, BC i CA

sobre el cercle circumscrit ABC , és a dir, són iguals a $2\widehat{C}$, $2\widehat{A}$ i $2\widehat{B}$ (per l'homotècia que transforma ABC en $A'B'C'$ i per les propietats dels angles inscrits al cercle ABC). Per tant,

$$\text{arc}(A'B') = 2\widehat{C}, \text{arc}(B'C') = 2\widehat{A}, \text{arc}(C'A') = 2\widehat{B}.$$

Considerem ara la figura 43. Com que A' és el punt mitjà de BC i C'' el punt mitjà de BH , resulta que $A'C''$ és paral·lela a l'altura BH . Anàlogament, $B'A''$ és paral·lela a l'altura CH i $C'B''$ és paral·lela a l'altura AH . Per tant, $A'C''HB'$ és un paral·lelogram. Així obtenim que els angles $\widehat{A'C''H}$ i $\widehat{HB'A'}$ són iguals. Però, per angles inscrits altra vegada, 2α és igual a l'arc $A'C'R$ i també a l'arc $A'B'Q$. A més a més, els costats $C''A'$ i $C''H$ de l'angle $\widehat{A'C''H}$ són perpendiculars, respectivament, als costats AC i AB . Per tant, $\alpha = \widehat{A}$. Tenim, doncs, que l'amplitud dels arcs $A'B'Q$ i $A'C'R$ és igual a $2\widehat{A}$. Per diferència [$B'Q = A'Q - A'B'$ i $C'R = A'R - A'C'$] obtenim que $B'Q = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}$ i $C'R = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}$. Anàlogament serà $A'P = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}$. És a dir,

$$\text{arc}(B'Q) = 2\widehat{A} - 2\widehat{C}, \text{arc}(C'R) = 2\widehat{A} - 2\widehat{B}, \text{arc}(A'P) = 2\widehat{B} - 2\widehat{C}.$$

Ara ja podem calcular l'arc $P'Q'$:

$$\begin{aligned} \text{arc}(P'Q') &= \frac{1}{3}\text{arc}(A'P) + \text{arc}(A'B') + \frac{1}{3}\text{arc}(B'Q) \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{B} - \widehat{C}) + 2\widehat{C} + \frac{2}{3}(\widehat{A} - \widehat{C}) \\ &= \frac{2}{3}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Que $\text{arc}(Q'R') = \frac{2\pi}{3}$ i $\text{arc}(R'P') = \frac{2\pi}{3}$, es veuen de manera anàloga.

6 Referències

H. S. M. Coxeter, Fundamentos de Geometría. Limusa.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry revisited, The Mathematical Association of America, 1967 (sexta edició).

H. Eves, A survey of geometry, Allyn and Bacon.

L. C. Larson, Problem-solving through problems, Springer-Verlag.

P. Puig Adam, Curso de Geometría métrica (Tomo I - Fundamentos). Gómez Puig Ediciones.

FORUM de problemes 93/94, Societat Catalana de Matemàtiques, IEC.

PROBABILITAT

Josep Pla i Carrera

Dos principis

El principi multiplicatiu

Suposem que una experiència E_1 té n_1 resultats possibles i una altra E_2 en té n_2 . Suposem que realitzem alhora i conjuntament les dues experiències. L'experiència $E_1 \times E_2$ tindrà $n_1 \cdot n_2$ resultats possibles.

El principi additiu

Suposem que dues experiències excloents E_1 i E_2 tenen respectivament n_1 i n_2 resultats possibles. L'experiència $E_1 \oplus E_2$ que consisteix en l'ocurrència d'una d'ambdues experiències té $n_1 + n_2$ resultats possibles.

Exemples:

- a) Hem d'anar a Madrid i per obres és necessari fer un tros en tren i un tros en autobús. Hi ha tres itineraris possibles de tren i dos d'autobús. De quantes maneres diferents podem anar a Madrid?
- b) Hem d'anar a Madrid i podem fer-ho en tren o en autobús. Suposem que hi ha tres itineraris possibles d'autobús i dos de tren. De quantes maneres diferents podem anar a Madrid?

Anàlisi combinatòria

Parts d'un conjunt

El nombre de parts (o subconjunts), d'un conjunt E amb m elements és 2^m .

Permutacions

Una permutació de m objectes consisteix a col·locar els m objectes en m llocs de manera que cada lloc solament en contingui un.

El primer lloc el podem omplir amb qualsevol dels m elements, mentre que el segon solament amb un dels $m - 1$ que queden i el tercer amb un dels $m - 2$, etc. El darrer lloc amb un sol element. Ara apliquem el principi multiplicatiu.

El nombre de permutacions possibles de m objectes és

$$P_m = m! = m(m - 1) \cdots (m - k) \cdots 2 \cdot 1.$$

Variacions

Una variació de m objectes presos de k en k consisteix a col·locar k dels m objectes en k llocs de manera que cada lloc solament en contingui un. Dues variacions amb els mateixos objectes però col·locats de maneres diferents són diferents.

El nombre de variacions de m elements presos de k en k és

$$V_m^k = m(m-1) \cdots (m-(k+1)) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Combinacions

Una combinació de m elements presos de k en k consisteix a triar k elements d'entre els m donats. Així doncs, dues variacions de m elements presos de k en k , que tinguin els mateixos elements i diferent col·locació, són la mateixa combinació. Per tant, cada combinació de m objectes presos de k en k dóna lloc a $k!$ variacions, és a dir,

$$C_m^k = \frac{1}{k!} \cdot V_m^k.$$

El nombre de combinacions de m elements presos de k en k és

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \binom{m}{k}.$$

Variacions amb repetició

A les variacions, un cop s'ha col·locat un objecte en un lloc ja no és possible tornar-lo a col·locar en un altre. Si es disposa de suficient nombre de còpies de cada objecte, un cop n'hem col·locat un en un lloc, és possible col·locar-ne una altra còpia en un altre lloc. Aleshores quan anem a col·locar aquest segon objecte (o còpia) estarem en les mateixes condicions que quan varem col·locar el primer.

Una variació amb repetició de m objectes presos de k en k consisteix a col·locar k còpies d'alguns dels m objectes en k llocs de manera que cada lloc solament en contingui una.

El nombre de variacions amb repetició de m elements presos de k en k és

$$VR_m^k = m^k.$$

Permutacions amb repetició

Si tenim m objectes dels quals k_1 són iguals entre si, k_2 són iguals entre si, $\dots$, k_r són iguals entre si, amb $k_1 + k_2 + \dots + k_r = m$ podem fer-ne les corresponents permutacions, que consistiran a col·locar-los en m llocs, i ocupant cada lloc un sol objecte.

Si tots els objectes fossin diferents, tindríem les permutacions de m objectes, P_m . Si hi ha repeticions de k_1 objectes, és evident que intercanviant el lloc d'aquests que són iguals,

obtidrem la mateixa permutació amb repetició. Però de canvis de lloc possibles d'aquests k_1 n'hi ha $k_1!$. Això mateix podem dir dels $k_2, \dots, k_r$ objectes repetits.

El nombre de permutacions amb repetició de m objectes dels quals k_1 són iguals entre si, k_2 són iguals entre si, $\dots$, k_r són iguals entre si, amb $k_1 + k_2 + \dots + k_r = m$ és

$$PR_m^{k_1 k_2 \dots k_r} = \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_r!}.$$

Combinacions amb repetició

Donat m objectes, dels quals en tenim tantes còpies com faci falta, una combinació amb repetició d'aquests m objectes presos de k en k consisteix a triar k còpies d'alguns d'aquests objectes.

Per tal de calcular el nombre de combinacions en repetició de m objectes presos de k en k , considerem el següent exemple: Tenim una pila de boles i cada una porta un número que pot ser 1, 2, 3, 4, ($m = 4$), i n'hem de triar 3 ($k = 3$). Per tal que quedi clara l'elecció, disposem d'una caps a amb $m = 4$ compartiments, marcats per $m - 1 = 3$ separadors. Al primer compartiment hi col·locarem les boles que hàgim pres del número 1, al segon les del número 2, etc. Totes les possibles col·locacions es veuen en aquesta taula

111	→	***				→	***
112	→	**	*			→	** *
113	→	**		*		→	** *
114	→	**			*	→	** *
122	→	*	**			→	* ***
123	→	*	*	*		→	* ***
124	→	*	*		*	→	* ***
133	→	*		**		→	* **
134	→	*		*	*	→	* **
144	→	*			**	→	* **
222	→		***			→	***
223	→		**	*		→	** *
224	→		**		*	→	** *
233	→		*	**		→	* **
234	→		*	*	*	→	* **
244	→		*		**	→	* **
333	→			***		→	***
334	→			**	*	→	** *
344	→			*	**	→	* **
444	→				***	→	***

Tal com indica la darrera columna de la taula, podem identificar cada tria amb una seqüència de tres asteriscs i tres barres, corresponents a les boles i als separadors, i fet de totes les maneres possibles; i d'aquestes n'hi ha tantes com les permutacions amb repetició de 6

elements amb 3 i 3 de repetits. En general, tindríem boles numerades amb 1, etc., m , de les quals n'hem de triar k , i la caps a hauria de tenir $m - 1$ separadors.

El nombre de combinacions amb repetició m objectes presos de k en k és

$$CR_m^k = PR_{m-1+k}^{m-1,k} = \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!} = C_{m+k-1}^k.$$

Primera aproximació a la probabilitat

Considerem un fenomen que té un nombre finit de resultats possibles $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. És l'espai mostral.

Suposem que cada resultat possible a_i té associat un nombre real p_i tal que

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + p_n = 1$$

El conjunt de valors p_i és una *valoració probabilística* de l'espai mostral.

Un *succés* A està format per un cert nombre r de resultats possibles de l'espai mostral S :

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}.$$

Direm que la *probabilitat* $P(A)$ del succés A és el valor

$$P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_r}.$$

Un fenomen és *equiprobable* quan $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$. Aleshores

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos possibles}}.$$

Problemes

PR1.—Proveu que (a) $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A .

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

(b') En general, $P(A_1 \cup \dots \cup A_m) = P(A_1) + \dots + P(A_m)$, si $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(d') Generalitzeu (d) a tres, quatre, etc. m successos.

(e) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, on $\bar{A}$ indica l'esdeveniment contrari de A .

(f) Si $A \subseteq B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$ i $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

PR2.—Aquest problema suggereix la definició general de probabilitat P en un espai mostral S . És una aplicació dels subconjunts de S en $\mathbb{R}$ que compleixi les tres propietats:

(a) Per a cada $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A .

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

Podeu veure que aleshores es compleixen les propietats (b'), (d), (d'), (e) i (f) del problema anterior.

Aquesta definició permet de generalitzar el cas *discret* al cas general en el qual S pot ser un conjunt infinit numerable o no numerable. L'únic que cal tenir en compte és que la probabilitat P ha d'estar definida en una família $\mathcal{A}$ de subconjunts d' S tancada per unió i per pas al complementari. Cal, a més, que $S \in \mathcal{A}$.

Un exemple concret ens el proporcionen els subconjunts d'un conjunt geomètric S que sigui una superfície o un sòlid. Aleshores, si $A \subseteq S$,

$$P(A) = \frac{\text{àrea } d'(A)}{\text{àrea } d'(S)} \quad \text{o} \quad P(A) = \frac{\text{volum } d'(A)}{\text{volum } d'(S)}.$$

Probabilitat condicionada i independència

Considerem el següent exemple: d'un lot de 100 productes amb 80 sense defectes i 20 amb defectes n'agafem dos i ho fem (a) amb substitució, (b) sense substitució.

Considerem ara els següents successos

$A = \{\text{el primer article és defectuós}\}$

$B = \{\text{el segon article és defectuós}\}$

En el primer cas $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. En el segon cas, $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Però quin és ara el valor de $P(B)$? És clar que ara, en el cas (b), el valor que pren $P(B)$ depèn del que hagi passat amb el succés A , ja que el comportament de la mostra varia segons que s'hagi esdevingut A o no. Aleshores indicarem $P(B|A)$ la probabilitat del succés B en el ben entès que el succés A ha succeït prèviament.

En l'exemple que estem comentant és clar que $P(B|A) = \frac{19}{99}$. (En realitat l'espai mostral ha canviat i els successos estan condicionats a A .)

Formalment definim la *probabilitat condicional* per l'expressió

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple. Llancem dos daus i anotem els resultats $\langle x_1, x_2 \rangle$, on x_i designa el resultat de l' i -èsim dau ($i = 1, 2$). Considerem els successos

$$A = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10\} \quad \text{i} \quad B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 < x_2\}.$$

Ara podem considerar el succés

$$A \cap B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10, x_1 < x_2\} = \{\langle 4, 6 \rangle\}.$$

D'on

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

De forma anàloga podríem haver calculat primer la probabilitat de $P(B|A)$ i d'ella haver-ne deduït la probabilitat de $P(A \cap B)$.

En definitiva, doncs,

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Llei de les probabilitats totals

Sigui A un succés i $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S , és a dir, una família finita de successos tal que

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \quad \text{i} \quad S = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{k-1} \cup B_k.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_{k-1}) + P(A \cap B_k) = \\ &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_k) \cdot P(B_k) \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Si, com abans, A és un succés i $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S , aleshores

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)}, i = 1, 2, \dots, k-1, k.$$

Aquesta fórmula rep el nom de fórmula per a calcular la probabilitat de les causes, ja que com que s'ha de donar una i només una de les causes B_i , ens permet de conèixer la probabilitat d'aquesta causa en el supòsit que s'hagi donat el succés A .

Successos independents

Dos successos A i B són *independents* si, i només si, cap d'ells no condiciona la probabilitat de l'altre; és a dir, si, i només si,

$$P(A|B) = P(A).$$

Dit d'una forma alternativa, si, i només si,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

En general, n successos $A_1, \dots, A_n$ són *mútuaament independents* si, i només si, per a tot $k = 2, \dots, n$, tenim que

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Problemes

PR3.—Suposem que un cistell conté 550 pomes de les quals 28 són podrides i 47 són verdes.

Si n'agafo una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui verda? I que sigui podrida?

Si suposem que les verdes no són podrides, quina és la probabilitat que sigui verda o podrida?

Si n'hi ha quinze de verdes i podrides, quina és la probabilitat que sigui verda i podrida?

PR4.—Tirem sis daus iguals. De quantes maneres podem aconseguir que les seves cares ens mostrin totes nombres diferents?

Ara tirem 6 daus de colors diferents. De quantes maneres podem aconseguir que els seus resultats siguin tots diferents?

En cada un dels casos, quina és la probabilitat que, en llançar-los una vegada, els sis daus ens mostrin un nombre diferent?

PR5.—*El problema de Fermat-Pascal.* Dos jugadors A i B juguen partides cada una de les quals té una probabilitat de $\frac{1}{2}$ de ser guanyada i de $\frac{1}{2}$ de ser perduda. Suposem que el resultat d'una partida no depèn pas dels resultats de les partides anteriors. (Pensem, per exemple, en una sèrie de “cares i creus”.) Cada jugador guanya un punt quan guanya i no-res quan perd. Convenen a jugar-se 100 pta cada un i que el pot de 200 pta se l'endurà

el primer que guanyi 4 partides. Per la raó que sigui han de plegar quan A necessita dues partides per tal d'haver-ne guanyat 4 i B en necessita 3. Com cal repartir el pot?

Feu el càlcul

(a) suposant que els successos són les situacions reals a partir d'aquell moment, si el joc hagués continuat (*solució de Pascal*);

(b) veient que en quatre partides s'acaba el joc i considerant totes les sèries teòriques (equiprobables) de 4 partides. (*solució de Fermat*).

PR6.—Tirem una moneda, després tirem un dau, i finalment traiem una carta d'un joc de 52 cartes i considerem els successos

A = surt cara

B = surt un 5 o un 6

C = surt una carta de piques

Quin és l'espai mostral S associat a aquesta experiència? Quines són, en relació amb aquest espai mostral, els successos $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$? Quines són les probabilitats que els corresponen? Són independents de dos en dos? I tots tres?

PR7.—Llancem una moneda n vegades i indiquem si surt cara o creu escrivint un 1 o un 0. Com és l'espai mostral S ? Quina és la probabilitat de cada un dels resultats possibles si la moneda és correcta? Quina és la probabilitat que surtin k uns? I la probabilitat que surtin $n - k$ zeros?

Suposem ara que la moneda està trucada i que la probabilitat que surti cara és p i la probabilitat que surti creu és $q = 1 - p$. Quina és la probabilitat d'un resultat concret que tingui k cares? Quants casos possibles hi ha amb k cares? Quina és la probabilitat que, en tirar la moneda n vegades, surtin k cares exactament? (*Fórmula de Bernoulli*.)

I k cares almenys?

Calcula de dues maneres diferents la probabilitat que surti almenys una cara.

PR8.—Sigui $S = \{1, 2, \dots, 120\}$ i suposem el cas equirepartit. Considerem els successos

$A = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 3\}$

$B = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 4\}$

Calculeu

(a) $P(A)$ i $P(B)$;

(b) $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

Són independents els successos A i B ?

Considereu ara el succés

$$C = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 6\}.$$

Quina és la probabilitat de C ? I de $B \cap C$? I de $B \cup C$? Els successos B i C , són independents?

Quina és la probabilitat del conjunt dels nombres divisibles per 3, no divisibles per 5 i divisibles per 4 o per 6? (En aquesta part suposem que en el conjunt infinit $\mathbb{N}$ de tots el nombres naturals la probabilitat de múltiple de tres és $\frac{1}{3}$, etc.)

PR9.—Calculeu la probabilitat que en agafar un nombre natural a l'atzar no sigui divisible ni per 3, ni per 4, ni per 6, però en canvi ho sigui per 2 o per 5.

PR10.—Calculeu la probabilitat que en agafar dos nombres naturals a l'atzar, siguin primers entre ells.

PR11.—Demostreu que és impossible de trucar una parella de daus de manera que la suma de les puntuacions (tirant-los a la vegada) tinguin la mateixa probabilitat.

PR12.—Quants enters hi ha entre 1 000 000 i 10 000 000 que no tinguin dues xifres iguals? I que no tinguin dues xifres iguals i consecutives ?

PR13.—Proveu que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$. (Indicació: useu la llei de Morgan.)

PR14.—Hi ha 184 socis del Barça dels quals 123 són sudafricans i 78 són negres. Trieu a l'atzar un d'aquests 184 socis. Quina és la probabilitat que sigui negre?

PR15.—Si $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$, aleshores doneu $P(A \triangle B)$ en funció de $P(A)$, $P(B)$ i $P(A \cap B)$ i en funció de $P(A)$, $P(B)$ i $P(A \cup B)$.

PR16.—Si $A_{m_1} = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } m_1\}$ i $A_{m_2} = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } m_2\}$, aleshores

$$P(A_{m_1} \cap A_{m_2}) \geq P(A_{m_1}) \cdot P(A_{m_2}).$$

En quins casos es dona la igualtat?

PR17.—El menú turístic d'un restaurant és:

Elegiu un dels entrants:

Sopa, Suc de fruita, Cocktail de marisc.

Elegiu un dels següents plats de vianda:

Bistec

Roast Beaf

Pollastre rostit

Mandonguilles amb espagueti

Elegiu un dels següents acompanyaments:

Patates fregides

Tomàquet a la grega

Pèsols saltejats

Elegiu una d'aquestes postres:

Fruita, Gelat, Formatge.

Elegiu:

Café o Té.

Quants menjars diferents hi pot fer un turista? Quin dia podrà tornar a casa seva si el primer dinar el fa el 28 de febrer de 1993, suposant que els vol tastar tots i només hi dina?

PR18.—Quina és la probabilitat que un succés A sigui independent d'ell mateix? Si A i B són dos successos independents i disjunts, quina és la probabilitat d' A ? I la de B ?

PR19.—Tirem cinc monedes independents. Quina és la probabilitat de 11010? Quina és la probabilitat que surtin tres cares exactament? Quina és la probabilitat que no surtin tres cares? *Nota.* La qüestió és força més complicada si els llançaments no són independents. Intenteu de donar-hi una resposta.

PR20.—*Argument de d'Alembert.* Llancem dues monedes. Són possibles tres successos: dues cares, dues creus, una cara i una creu. Cada succés té doncs probabilitat igual a $\frac{1}{3}$. És correcta la interpretació de d'Alembert? Per què?

PR21.—Llancem 6 daus indistingibles. Quants resultats diferents podem observar? I si els daus són distingibles?

PR22.—Considerem totes les VR_2^4 del conjunt $\{1, 2, 3, 4\}$ i totes les V_2^4 . Quines cal eliminar per tal d'aconseguir CR_2^4 ? i quines si volem solament els de C_2^4 ?

PR23.—(i) Quatre persones volen jugar simultàniament partits individuals de tennin i disposen de dues pistes. De quantes maneres podem distribuir-los, si no tenim en compte l'elecció de pista? De quantes maneres, si es té en compte la pista on juga cada parella?

(ii) De quantes maneres podem situar m persones en r llocs diferents si volem que $m_1, m_2, \dots, m_r$ es colloquin respectivament al lloc $1, 2, \dots, r$?

PR24.—Sis muntanyencs s'han de dividir en 3 grups de dos cada un per tal de fer l'assalt final. De quantes maneres poden fer-ho? I si els grups consten d'1, 2 i 3 persones?

Si ara cal ordenar-los en primer, segon i tercer grup d'assalt, de quantes maneres ho podem fer?

PR25.—Proveu que (i)

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n};$$

(ii)

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}.$$

PR26.—Proveu que

$$\binom{m}{n} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot \binom{m-k}{n-j}$$

i calculeu $\binom{7}{3}$ i $\binom{7}{5}$ fent servir el triangle aritmètic fins a la fila 5.

PR27.—En un cistell de 550 pomes n'hi ha un 2% de podrides. Quina és la probabilitat que, en agafar-ne 25, 2 estiguin podrides?

PR28.—Barragem les cartes d'una baralla de 52 cartes. Quina és la probabilitat que els 4 asos quedin junts?

PR29.—Volem repartir en parts iguals 15 alumnes nous entre els 3 grups que hi ha a l'escola. Entre aquests 15 alumnes n'hi ha tres de gironins. Quina probabilitat hi ha que cada classe en tingui un? Quina probabilitat hi ha que tots tres vagin a parar a un mateix grup?

PR30.—Llancem sis daus. Quina és la probabilitat d'obtenir tres parelles?

PR31.—*El problema de l'aniversari.* Quina és la probabilitat que en un grup d' n persones n'hi hagi dues almenys que hagin nascut el mateix dia?

PR32.—Tenim 4 cartes conegudes i les posem de cap per avall damunt la taula. A l'atzar els donem un valor; quina és la probabilitat d'endevinejar-ne 1, 2, 3 o 4?

PR33.—De quantes maneres podem posar n boles en n caps numerades de manera que una capsa exactament quedi buida? (*Indicació: distingiu el cas distingible del cas indistingible.*)

PR34.—*La paradoxa de Bertrand.* Tracem una corda a l'atzar en un cercle. Quina és la probabilitat que sigui més gran que no pas el costat del triangle equilàter inscrit? Distingiu tres mètodes de càlcul:

- (a) la distància al centre;
- (b) la situació del punt mitjà de la corda;
- (c) l'angle central que determina la corda. Quina és la paradoxa?

PR35.—Colloquem 8 torres en un tauler d'escacs. Quina és la probabilitat que cap d'elles pugui matar-ne una altre?

PR36.—Una noia vol regalar al seu xicot una camisa o una corbata pel seu aniversari. Però solament pot triar entre 3 camises i 2 corbates. Quantes tries diferents pot fer? I si vol comprar alhora una camisa i una corbata?

PR37.—En una botiga hi ha tres menes de camises per vendre

- (a) Si dos homes compren una camisa cada un, de quantes maneres diferents poden fer-ho?
- (b) Si un home compra dues camises, de quantes maneres pot triar-les?

PR38.—Quantes inicials diferents podem fer amb dues o tres lletres de l'alfabet?

Quantes lletres hauria de tenir un alfabet per tal que un milió de persones diferents es pogués identificar amb inicials de dues o tres lletres?

PR39.—Un test conté 12 preguntes que solament accepten la resposta de “veritat” o “fals”. Si un estudiant decideix col·locar-ne sis de cada a l’atzar, de quantes maneres pot fer-ho? Suposant que efectivament sis de les preguntes siguin certes i sis falses, quina és la probabilitat que ho endivini?

PR40.—De quantes maneres es poden aparellar 4 nois i 4 noies? De quantes maneres es poden col·locar en una fila de manera que s’alternin persones de sexe diferent?

PR41.—De quantes maneres podem triar un comitè de tres persones d’un grup de 20? I de quantes si cal que una sigui el president, l’altre el vice-president i la tercera secretari?

PR42.—Si tenim dues monedes de 50 pta, dues de 25 pta i tres duros, quantes sumes diferents podem aconseguir? Si canviem una de les monedes de 25 pta en duros, quantes sumes diferents podrem aconseguir?

PR43.—En una porta hi ha dos pany i les claus són en una capsa en la qual hi ha sis claus. Si en traiem dues a l’atzar i en colloquem una a cada pany, quina és la probabilitat que obrin la porta? Quina és la probabilitat que el parell de claus serveixi per obrir la porta?

PR44.—S’han perdut dos cargols d’una màquina que té cargols de tres mides diferents. Agafem tres cargols de mides diferents. Quina és la probabilitat que ens serveixin per arreglar la màquina?

PR45.—Llancem un dau tres vegades. Quina és la probabilitat que les tres vegades surti el número més alt? Quina és la probabilitat que cada vegada surti un valor més alt que l’anterior?

PR46.—Llancem tres daus dues vegades. Quina és la probabilitat que les dues vegades s’obtingui el mateix número

(a) si els daus són distingibles?

(b) si els daus són indistingibles?

PR47.—En una festa hi ha 6 dones i 4 homes. De quantes maneres podem formar quatre parelles de ball? I tres parelles de ball?

PR48.—Si agafem 4 sabates a l'atzar de cinc parells diferents, quina és la probabilitat que almenys poguem fer una parell de sabates?

PR49.—Sabeu que de les quatre cartes cap per avall que hi ha damunt la taula, dues són vermelles i dues negres. Els assignem un color a l'atzar. Quina és la probabilitat d'encertar-ne 4, 2 o cap?

PR50.—Un autobús fa 4 parades dins l'aeroport per tal de distribuir 15 passatgers. Quina és la probabilitat que tots baixin a la mateixa parada? Quina és la probabilitat que almenys una persona baixi a cada una de les parades?

PR51.—Deu llibres es col·loquen en dues piles. De quantes maneres podem fer-ho si els llibres són indistingibles? I si són distingibles? I si les piles són distingibles o indistingibles? Analitzeu els 4 casos.

PR52.—Repartim deu llibres diferents entre en Daniel, en Felip, en Pau i en Joan de manera que s'enduen respectivament lots de 3, 3, 2 i 2 llibres. De quantes maneres podem fer-ho?

En Pau i en Joan no estan d'acord amb aquest repartiment i es decideix repartir els lots entre ells de manera que cada un tingui un lot. De quantes maneres podem fer ara el repartiment? Ara la Maria i la Cori volen també tenir dret a aconseguir llibres. Es decideix repartir els lots entre tots sis de forma que hi haurà dues persones que no obtindran cap lot. De quantes maneres podem fer això?

PR53.—En un bombo hi ha 366 boles etiquetades amb els dies d'un any de traspàs. Si n'extreiem 180, quina és la probabilitat que corresponguin a dies distribuïts uniformement sobre els 12 mesos? Quina és la probabilitat que entre les 30 primeres boles extretes no ni hagi cap dia del mes d'Agost o de Setembre?

Mostra de solucions

Solució del problema PR5

(a) Suposem que seguim jugant realment. Tenim els següents casos i probabilitats

Favorables a A :		Favorables a B :	
AA	$1/4$	$ABBB$	$1/16$
ABA	$1/8$	$BABB$	$1/16$
$ABBA$	$1/16$	$BBAB$	$1/16$
BAA	$1/8$	BBB	$1/8$
$BABA$	$1/16$		
$BBAA$	$1/16$		

El problema no és equirepartit.

(b) Si el problema és equirepartit i considerem tots els casos possibles, és a dir, totes les quaternes possibles –si el joc seguís, en quatre partides segur que hi ha un guanyador– podem comptar fàcilment els casos favorables a A i els casos favorables a B que són, respectivament, 11 i 5. S'obté el mateix resultat que a (a).

Solució del problema PR9

Posem $I_n = n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$. Aleshores es demana la probabilitat del succés

$$A = (I_2 \cup I_5) \cap \overline{I_3} \cap \overline{I_4} \cap \overline{I_6},$$

on $\overline{I_n} = \mathbb{Z} - I_n$. Cal recordar que $I_n \cap I_m = \{z \in \mathbb{Z} : z = \dot{n} \text{ i } z = \dot{m}\} = I_r$, on $r = \text{mcm}(m, n)$. Cal recordar també que si M i N són successos, llavors

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

i, com que $M \cap \overline{N} = M - (M \cap N)$,

$$P(M \cap \overline{N}) = P(M) - P(M \cap N).$$

Ara cal aplicar aquestes fórmules a l'esdeveniment A .

Solució del problema PR21

Si els daus són distingibles, aleshores tenim 6^6 resultats diferents.

Si són indistingibles hi ha $CR_6^6 = 462$ casos, que es poden desglosar:

- tots iguals: $C_6^1 = 6$
- 5 d'iguals: $C_6^1 \cdot C_5^1 = 30$
- 4 d'iguals i $\begin{cases} 2 \text{ de diferents: } C_6^1 \cdot C_5^2 = 60 \\ 2 \text{ d'iguals: } C_6^1 \cdot C_5^1 = 30 \end{cases}$
- 3 d'iguals i $\begin{cases} 3 \text{ de diferents: } C_6^1 \cdot C_5^3 = 60 \\ 2 \text{ d'iguals i un de diferent: } C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 120 \\ 3 \text{ d'iguals: } C_6^2 = 15 \end{cases}$
- 2 d'iguals i $\begin{cases} 4 \text{ de diferents: } C_6^1 \cdot C_5^4 = 30 \\ 2 \text{ d'iguals i 2 de diferents: } C_6^2 \cdot C_4^2 = 90 \\ 2 \text{ d'iguals i 2 iguals: } C_6^3 = 20 \end{cases}$
- tots diferents: $C_6^6 = 1$

Solució del problema PR32

Tenim 4! maneres diferents d'assignar valors. Volem calcular la probabilitat d'encertar exactament una carta que pot se la primera, o la segona, o la tercera o la quarta. Si les cartes reals són a, b, c i d i suposem que hem d'encertar la quarta, els valors que podem assignar a les tres primeres són

$$abc, acb, bac, cba, bca, cab.$$

D'aquests casos, els únics que són favorables a encertar només la quarta són els dos darrers. Els mateix valor ens sortiria si calculéssim els casos favorables a encertar exactament la primera, la segona o la tercera. Els casos favorables en total són 8 i la probabilitat serà $8/24 = 1/3$.

Si hem d'encertar exactament dues cartes, el parell de cartes encertades es pot triar de $C_4^2 = 6$ maneres diferents, i si per exemple hem d'encertar la tercera i la quarta, els valors que podem assignar a la primera i la segona són

$$ab, ba$$

i només aquest últim fa que no s'encerti ni a primera ni la segona. Els casos favorables són 6 i la probabilitat és $6/24 = 1/4$.

Encertar exactament tres cartes és impossible.

Calculeu la probabilitat d'encertar totes les cartes, i la de no encertar-ne cap.

Solució del problema PR42

És un problema de comptes de la vella, és a dir, cal comptar sense equivocar-se ni deixar-se cap cas, ni repetir-ne cap.

D (duros)	$D+25$	$D+2 \cdot 25$ $(D+50)$	$D+25+50$	$D+2 \cdot 25+50$ $(D+2 \cdot 50)$	$D+2 \cdot 50$ $+25$	$D+2 \cdot 50$ $+2 \cdot 25$
	25	50	75	100	125	150
5	30	55	80	105	130	155
10	35	60	85	110	135	160
15	40	65	90	115	140	165

L'altre cas es deixa per al lector.

ARITMÈTICA

Griselda Pascual i Xufré

Introducció.

En aquest capítol ens proposem aprendre a resoldre problemes d'Aritmètica. Segurament que la paraula aritmètica us sonarà a quelcom que vareu aprendre a l'escola primària i que no n'heu sentit a parlar més al llarg dels estudis secundaris. Per això, pensar ara a aprendre a resoldre problemes d'aritmètica us semblarà un xic estrany, potser fins i tot pensareu que està fora de lloc per la seva senzillesa. Si és així, esteu ben lluny de la realitat. Hi ha problemes d'aritmètica molt difícils; tant, que alguns d'ells s'ha tardat molt temps a resoldre a pesar de treballar-hi grans matemàtics. Recentment n'hem tingut un exemple: *El Teorema de Fermat*. Aquest teorema diu: "Si n és un nombre natural més gran que 2, l'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions en nombres enters." El va enunciar Fermat cap a la meitat del segle XVII; fins l'any passat (1995) no s'ha trobat la demostració, i aquesta s'ha obtingut utilitzant mitjans de la més alta matemàtica. El Teorema de Fermat és un problema d'aritmètica perquè imposa que les solucions siguin nombres enters. Hi ha altres problemes d'aritmètica, com per exemple l'anomenada *Conjectura de Goldbach*, enunciada per aquest matemàtic l'any 1742, i que diu "Tot nombre parell més gran que dos és suma de dos primers", que encara no estan resolts.

Si doneu un cop d'ull als problemes proposats, que pretenen ser una mostra dels problemes d'aritmètica que es poden presentar a aquest nivell, veureu que sempre només hi intervenen nombres enters i en algun cas racionals. Per això són problemes d'aritmètica. Han estat seleccionats de manera que els pogueu resoldre, o bé utilitzant propietats dels nombres enters que potser no les heu estudiat mai però teniu prou maduresa matemàtica per entendre-les, o bé amb recursos d'àlgebra i d'anàlisi que heu après en el batxillerat. Però si intenteu resoldre'ls, potser moltes vegades no sabreu ni per on començar.

Per això, encara que considerem prioritari revisar les propietats del nombres enters abans

esmentades, en lloc de fer-ne un llistat, ens ha semblat millor escollir de forma adequada uns quants problemes que intentarem pensar conjuntament, i incloure dins la forma de resoldre'ls les definicions i proposicions que siguin necessàries. (Donem per sabudes la definició de nombres enters i llurs operacions).

Observareu que hi ha dos tipus de problemes. Uns demanen que es busquin els nombres enters que satisfacin determinades condicions. Altres que es demostrï alguna propietat de determinats nombres enters. Tant per als uns com per als altres hem procurat indicar una metodologia per a la seva resolució. Però, com podreu comprovar, moltes vegades compta molt l'enginy matemàtic que cal cultivar resolent molts problemes.

També veureu que de les proposicions que intercalem en els problemes, algunes van acompanyades de les demostracions i d'altres no. S'ha posat la demostració sempre que aquesta ens podia donar un camí per arribar a la solució del problema. Les altres proposicions podeu o intentar demostrar-les o bé cercar la demostració en algun llibre.

Finalment, només voldriem aconsellar-vos que us fessiu vosaltres un petit promptuari d'aritmètica, extraient dels problemes totes les definicions i propietats que hi trobeu. Crec que us serà útil quan us proposeu de resoldre altres problemes.

Problema 1. Trobeu tots els triangles rectangles de costats enters que tenen el perímetre igual a l'àrea. (És un problema clàssic).

En principi és un problema de geometria, ja que ens cal saber propietats dels triangles rectangles. Però com que l'única cosa que hem d'utilitzar són les mesures dels costats podem enunciar el mateix problema aritmèticament. Si designem per x , y les mesures dels catets i per z la de la hipotenusa, el teorema de Pitàgores diu que $z^2 = x^2 + y^2$; el perímetre del triangle és $x + y + z$ i l'àrea $\frac{1}{2}xy$. Per tant podem enunciar el problema així:

Trobeu totes les solucions en nombres naturals (les mesures són sempre positives) del sistema d'equacions

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ x + y + z &= \frac{1}{2}xy. \end{aligned}$$

Solució. Fent us dels coneixements d'àlgebra, com que la segona equació és lineal en z ,

aïllarem z en aquesta equació i la substituïrem a la primera. Obtindrem

$$z = \frac{1}{2}xy - (x + y)$$

$$\left(\frac{1}{2}xy - (x + y)\right)^2 = x^2 + y^2.$$

La segona equació és una equació de segon grau en dues incògnites que, després de desenvolupada i simplificada, queda de la forma:

$$x^2y^2 - 4xy(x + y) + 8xy = 0$$

o sigui

$$xy(xy - 4(x + y) + 8) = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són $x = 0, y = 0$, i els valors que són solució de l'equació $xy - 4(x + y) + 8 = 0$.

En aquest moment entra l'aritmètica. Quins valors naturals de x, y satisfan aquesta equació? Per trobar-los només necessitem un xic d'enginy. Observem que si en el numerador en lloc d'un 8 hi hagués un 16 les coses serien molt senzilles. Doncs bé, fem entrar el 16 escrivint:

$$x = \frac{4y - 16}{y - 4} + \frac{8}{y - 4} = 4 + \frac{8}{y - 4}.$$

D'aquí resulta que x serà natural si i només si $y - 4$ divideix 8. Com que els divisors de 8 són 8, 4, 2, 1 haurà de ser $y - 4 = 8, 4, 2, 1$ i per tant les solucions són

$$y = 12, x = 5; \quad y = 8, x = 6; \quad y = 6, x = 8; \quad y = 5, x = 12.$$

Els únics triangles rectangles solució del problema seran el que tingui catets 12 i 5 i hipotenusa 13, i el que tingui catets 8 i 6 i hipotenusa 10.

Problema 2. El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

Aquest problema és clarament un problema d'aritmètica; només hi intervenen nombres enters. Necessitem saber què és un nombre primer, amb la qual cosa entrem a la *divisibilitat* de nombres enters. En el problema anterior ja hem utilitzat que els nombres naturals divisors de 8 són 1, 2, 4, 8 sense donar la definició de divisor. Ho fem a continuació.

Definició. Donats dos nombres enters a i b es diu que b és múltiple de a o a divisor de b si existeix un nombre enter que multiplicat per a doni b ; és a dir si l'equació $ax = b$ té solució en nombres enters. S'escriu $b = a$ o bé $a|b$.

Tot nombre natural diferent de 1 té almenys dos divisors que són ell mateix i la unitat.

Definició. Un nombre natural es diu que és primer quan només té dos divisors. Quan té més de dos divisors es diu que és compost. El nombre 1 no és ni primer ni compost; es diu que és una unitat.

El nom de primer ve suggerit pel següent teorema, que per la seva importància, s'anomena

Teorema fonamental. Tot nombre natural compost descompon de manera única (sense tenir en compte l'ordre) en producte de factors primers.

Ara ja tenim el que necessitem per resoldre el problema. Veiem que el nombre 9687600 és compost ja que acaba en dos zeros. Descomponem-lo en factors primers:

$$9687600 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 23.$$

També aquí fem servir l'enginy per agrupar adequadament els factors i trobem que

$$8687600 = 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26.$$

Problema 3. Trobeu totes les solucions enteres de l'equació

$$p(x + y) = xy$$

on p és un nombre primer.

Observem que el primer membre de l'equació és el producte d'un nombre primer per la suma dels dos nombres que hem de cercar, i el segon el producte d'aquests dos nombres. Per resoldre'l utilitzarem la següent

Propietat. Si un nombre primer divideix un producte de dos nombres enters, en divideix almenys un.

Suposem que p divideix x i posem $x = pt$ amb t un nombre enter. Substituint aquesta expressió a l'equació donada es té:

$$p(pt + y) = pty, \quad \text{d'on} \quad pt + y = ty, \quad \text{o} \quad pt = y(t - 1).$$

Com que t i $t - 1$ no tenen cap divisor en comú, o p divideix y , o $p = t - 1$ i $y = t$.

Si p divideix y és $y = pu$ amb u un nombre enter, i substituint a l'equació que havíem obtingut resulta $pt = pu(t - 1)$ d'on $t = u(t - 1)$. Si $t = 0$, com que $t - 1$ és diferent de zero ha de ser $u = 0$, i aquests valors ens proporcionen la solució $x = 0$, $y = 0$. Si $t \neq 0$ ha de ser $t - 1 \neq 0$ i $u = \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$. Com que u ha de ser un enter diferent de zero, haurà de ser $t - 1 = 1$, és a dir $t = 2$ i $u = 2$, d'on s'obté la solució $x = 2p$, $y = 2p$. Si $p = t - 1$ i $y = t$ s'obté la solució $y = p + 1$, $x = py = p(p + 1)$. Com que l'equació és simètrica en x, y el mateix raonament fet amb la incògnita x es pot fer amb la incògnita y amb la qual cosa obtindrem la solució $x = p + 1$, $y = p(p + 1)$.

Exemple. Si $p = 5$ les solucions són $x = 0, y = 0$; $x = 10, y = 10$; $x = 30, y = 6$; $x = 6, y = 30$.

Problema 4. Trobeu un nombre natural n sabent que admet només dos divisors primers diferents, que el nombre dels seus divisors és 6 i que la suma de tots els seus divisors és 28.

Per resoldre aquest problema ens cal saber calcular el nombre de divisors d'un nombre natural n i la suma de tots els seus divisors. Per això tenim la següent

Proposició. Si n descompon en factors primers de manera que

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$$

amb p_i , ($i = 1, 2, \dots, r$) nombres primers diferents, s'indica per $d(n)$ el nombre de divisors de n i per $s(n)$ la suma de tots aquests divisors, i es compleix

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1); \quad s(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{a_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

Intenteu demostrar aquesta proposició.

Ja estem en condicions de resoldre el problema. Posem $n = p^a q^b$ on p i q representen els dos divisors primers diferents que divideixen n . Per les fórmules de la proposició ha de ser

$$(a + 1)(b + 1) = 6; \quad \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} = 28$$

Com que $a \geq 1$, $b \geq 1$, l'única descomposició possible de 6 vàlida és $6 = 2 \cdot 3$; per tant de la primera equació resulta $a + 1 = 2$, $b + 1 = 3$, o sigui $a = 1$, $b = 2$.

Llavors la segona equació pren la forma

$$\frac{p^2 - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 28 \quad \text{i simplificant} \quad (p + 1)(q^2 + q + 1) = 2^2 \cdot 7.$$

Com que p és primer $p + 1 = 4$ i $p = 3$, i de $q^2 + q + 1 = 7$ resulta $q = 2$. El nombre cercat és per tant $n = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Problema 5. Resoldre amb nombres naturals el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} xy = 51840 \\ \text{mcd}(x, y) = 24 \end{array} \right\}.$$

En aquest problema hi intervé el concepte de màxim comú divisor de dos nombres naturals. Recordem-ho,

Definició. El màxim comú divisor de dos nombres naturals a i b és el nombre natural d que divideix a i b i que tot altre divisor de a i b el divideix. S'indica per $\text{mcd}(a, b) = d$. Si $d = 1$ és diu que els dos nombres són primers entre si o primers entre ells.

Proposició. Si es divideixen dos nombres a i b pel seu màxim comú divisor, s'obtenen dos nombres primers entre ells.

Ara tenim tot el que necessitem per resoldre el problema.

Posem $x = 24t$, $y = 24u$ on t i u representen enters primers entre si. Llavors $24^2 tu = 51840$ i per tant $tu = \frac{51840}{576} = 90$. Només ens cal ara, descompondre 90 de totes les maneres possibles amb factors primers entre si, per obtenir totes les solucions del problema. $90 = 45 \cdot 2 = 9 \cdot 10 = 18 \cdot 5$. Fent $t = 45$, $u = 2$ es té $x = 1080$, $y = 48$; fent $t = 9$, $u = 10$ es té $x = 216$, $y = 240$; i finalment fent $t = 18$, $u = 5$ es té $x = 432$, $y = 120$. Permutant la x i la y s'obté una altra terna de solucions.

Per tal de determinar el màxim comú divisor de dos nombres naturals cal tenir en compte que es disposa d'un algorisme molt útil que només fa ús de la divisió entera.

Algorisme d'Euclides. Siguin a i b dos nombres naturals, $a > b$. La divisió entera de a per b ens dóna dos nombres q_1, r_1 que compleixen $a = bq_1 + r_1$, $r_1 < b$. Dividint b per r_1 tindrem $b = r_1q_2 + r_2$ amb $r_2 < r_1$; dividint r_1 per r_2 serà $r_1 = r_2q_3 + r_3$ amb $r_3 < r_2$. Seguint aquest procés, com que els residus formen una successió de nombres naturals decreixent, s'arribarà a un residu 0. L'últim residu no nul obtingut és el màxim comú divisor de a i b . Per facilitar el càlcul s'acostumen a posar els diversos nombres que intervenen a l'algorisme en la forma següent:

	q_1	q_2	$\cdots$	q_{k+1}	q_{k+2}	q_{k+3}
a	b	r_1	$\cdots$	r_k	r_{k+1}	r_{k+2}
r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_{k+2}	0	

$$r_{k+2} = \text{mcd}(a, b)$$

Problema 6. Trobeu dos nombres enters que satisfacin l'equació

$$1547x + 560y = 7.$$

Anem a veure con l'algoritme d'Euclides es pot utilitzar per resoldre aquesta equació. Comencem aplicant-lo per trobar el $\text{mcd}(1547, 560)$.

	2	1	3	4	1	3
1547	560	427	133	28	21	7
427	133	28	21	7	0	

i observeu que $\text{mcd}(1547, 560) = 7$. Escriviu els resultats parcials

$$7 = 28 - 1 \cdot 21$$

$$21 = 133 - 4 \cdot 28$$

$$28 = 427 - 3 \cdot 133$$

$$133 = 560 - 1 \cdot 427$$

$$427 = 1547 - 2 \cdot 560$$

i feu les successives substitucions:

$$\begin{aligned} 7 &= 28 - 1 \cdot 21 = 28 - 1 \cdot (133 - 4 \cdot 28) = 5 \cdot 28 - 1 \cdot 133 = 5 \cdot (427 - 3 \cdot 133) - 1 \cdot 133 \\ &= 5 \cdot 427 - 16 \cdot 133 = 427 - 16 \cdot (560 - 1 \cdot 427) = 21 \cdot 427 - 16 \cdot 560 \\ &= 21 \cdot (1547 - 2 \cdot 560) - 16 \cdot 560 = 21 \cdot 1547 - 58 \cdot 560. \end{aligned}$$

amb la qual cosa heu obtingut la igualtat

$$1547 \cdot 21 + 560 \cdot (-58) = 7$$

Per tant $x = 21$, $y = -58$ són dos dels nombres cercats. Aquests no són els únics ja que posant

$$x = 21 - 560t \quad y = -58 + 1547t$$

i substituint a l'equació resulta

$$1547 \cdot (21 - 560t) + 560 \cdot (-58 + 1547t) = 7.$$

Donant a t tots els valors enters obtindreu totes les solucions.

Problema 7. Resoleu el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} \text{mcm}(x, y) = 546212 \\ xy = 983016 \end{array} \right\}$$

En aquest problema intervé el concepte de mínim comú múltiple. Recordem la

Definició. El mínim comú múltiple de dos nombres naturals a i b és el nombre natural m que és múltiple de a i b i que divideix tot altre múltiple de a i b .

El problema es pot ara reduir al Problema 5 aplicant la següent

Propietat. Es compleix sempre

$$\text{mcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{mcd}(a, b)} \quad \text{o bé} \quad \text{mcd}(a, b) = \frac{ab}{\text{mcm}(a, b)}.$$

Resulta

$$\text{mcd}(x, y) = \frac{983016}{54612} = 18$$

i ja estem en les condicions del Problema 5. Seguint aquells passos obtenim les solucions

$$x = 1332, y = 738; \quad x = 1476, y = 666; \quad x = 36, y = 27306.$$

Problema 8. Els tres nombres naturals $1652_{(b)}$, $2012_{(b)}$, $2042_{(b)}$ (escrits en base b) estan en progressió aritmètica. Determineu la base b i la raó de la progressió.

En aquest problema hi intervenen dos conceptes, el de base d'un sistema de numeració i el de progressió aritmètica. El primer resulta de la següent

Proposició. Donat un nombre natural $b \geq 2$, tot nombre natural n es pot escriure de manera única de la forma

$$n = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_rb^r$$

on els a_i , $i = 0, 1, \dots, r$ són nombres naturals menors que b amb $a_r \neq 0$. El nombre expressat així es diu que està escrit en el sistema de numeració de base b .

Recordem el segon concepte del problema.

Definició. Una successió de nombres $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, \dots$ forma una progressió aritmètica quan la diferència de dos termes consecutius $a_{i+1} - a_i$ és un nombre constant r que s'anomena raó de la progressió.

Sabent això la resolució del problema proposat no presenta cap dificultat.

S'ha de complir

$$(2b^3 + 4b + 2) - (2b^3 + b + 2) = (2b^3 + b + 2) - (b^3 + 6b^2 + 5b + 2)$$

que després d'operar queda de la forma

$$b^3 - 6b^2 - 7b = 0$$

Ara cal resoldre aquesta equació de tercer grau amb l'incògnita b . En aquest cas és fàcil perquè es pot treure b factor comú i resoldre

$$b(b^2 - 6b - 7) = 0$$

Una solució és $b = 0$, i les altres dues les solucions de l'equació de segon grau $b^2 - 6b - 7 = 0$ es veuen immediatament: $b = -1$, $b = 7$. D'aquestes tres solucions la única vàlida pel nostre problema és $b = 7$ ja que s'ha de complir la condició $b \geq 2$.

La raó de la progressió és $r = 3b = 21$.

Problema 9. Trobeu quin és l'exponent de 2 en la descomposició en factors primers de $29!$. Per analitzar el problema escrivim el desenvolupament de $29!$.

$$\begin{aligned} 29! = & 1 \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{\underline{4}} \cdot 5 \cdot \underline{6} \cdot 7 \cdot \underline{\underline{8}} \cdot 9 \cdot \underline{10} \cdot 11 \\ & \cdot \underline{\underline{12}} \cdot 13 \cdot \underline{14} \cdot 15 \cdot \underline{\underline{16}} \cdot 17 \cdot \underline{18} \cdot 19 \cdot \underline{\underline{20}} \\ & \cdot 21 \cdot \underline{\underline{22}} \cdot 23 \cdot \underline{\underline{24}} \cdot 25 \cdot \underline{26} \cdot 27 \cdot \underline{\underline{28}} \cdot 29 \end{aligned}$$

Subratllem amb una ratlleta els múltiples de 2 i observem que d'aquests n'hi ha uns que només tenen una vegada el factor 2 i d'altres que el tenen més d'una vegada. Subratllem amb una altra ratlleta els que tenen el factor 2 dues vegades és a dir els múltiples de 4; també d'aquests n'hi ha que només el tenen dues vegades i d'altres que el tenen més de dues vegades. Subratllem amb una altra ratlleta els que el tenen més de dues vegades és a dir els múltiples de 8. També d'aquests n'hi ha que el tenen només tres vegades i d'altres que el tenen més de tres vegades és a dir els múltiples de 16 que els subratllem amb una altra ratlleta. Observem que no n'hi ha cap que tingui el factor 2 més de quatre vegades, ja que si algú el tingués cinc vegades seria múltiple de 32 i $32 > 29$. L'exponent amb què figura 2 a la descomposició de $29!$ és igual al total del nombre de ratlletes que hem dibuixat o sigui $14+7+3+1=25$. Si recordem que la part entera d'un nombre x és el nombre enter més gran que és més petit o igual que x , que l'expresssem per $[x]$, observarem que $14 = \left[\frac{29}{2} \right]$, $7 = \left[\frac{29}{2^2} \right]$, $3 = \left[\frac{29}{2^3} \right]$, $1 = \left[\frac{29}{2^4} \right]$. Per tant podem escriure que l'exponent amb què figura 2 a la descomposició amb factors primers de $29!$ és

$$a = \left[\frac{29}{2} \right] + \left[\frac{29}{2^2} \right] + \left[\frac{29}{2^3} \right] + \left[\frac{29}{2^4} \right].$$

El mateix raonament que hem fet amb $29!$ i el primer 2 és vàlid per a $n!$, n un enter qualsevol i un nombre primer p .

Per exemple, si volem calcular l'exponent a en què figura 7 en la descomposició de $1000!$, com que $7^4 = 2401 > 1000$, farem

$$a = \left[\frac{1000}{7} \right] + \left[\frac{1000}{7^2} \right] + \left[\frac{1000}{7^3} \right] = 142 + 20 + 2 = 164.$$

Seria vàlid el raonament si p no fos primer? Intenta amb un exemple donar la resposta. En general podem enunciar la següent

Proposició. L'exponent a en que figura un primer p en la descomposició de $n!$ en factors primers és

$$a = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

Encara que hem posat punts suspensius aquesta suma sempre acabarà ja que $\left[\frac{n}{p^k} \right] = 0$ si $p^k > n$.

Problema 10. Determineu les possibles bases de numeració x en les quals el nombre 532_x és múltiple de 5.

Pel problema 8 sabem que aquest problema és equivalent a trobar tots els nombres naturals $x \geq 2$ tals que $5x^2 + 3x + 2$ és múltiple de 5.

Observem, en primer lloc, que $5x^2$ és múltiple de 5 per qualsevol valor enter de x ; per tant el problema queda reduït a trobar tots els valors enters de $x \geq 2$ tals que $3x + 2$ és múltiple de 5, és a dir $3x + 2 = 5k$ on k ha de ser un nombre enter. Seguint les indicacions del problema 6, i pensant un xic, podríem resoldre en nombres enters l'equació $3x - 5k = 2$. Però podem trobar un camí més curt introduïnt un concepte nou que, com veurem més endavant, ens serà molt útil per resoldre molts problemes. És la noció de *congruència* de nombres enters respecte d'un nombre natural $m > 1$ que s'anomena *mòdul* de la congruència.

Comencem amb un exemple que ens servirà per resoldre el problema proposat.

Considerem el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters on hi tenim definit la suma, el producte, i divisió entera. Prenem $m = 5$ com a mòdul de la congruència. Observem que tot nombre enter o serà múltiple de 5, o en dividir-lo per 5 donarà residus 1, 2, 3, o 4. Això ens permet classificar el conjunt $\mathbb{Z}$ en cinc classes disjunctes que designarem per $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, posant a la classe $\bar{0}$ els múltiples de 5, i a les classes $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ els nombres que donin respectivament residu 1, 2, 3, 4 en dividir-los per 5. És a dir

$$\bar{0} = 5k, \quad \bar{1} = 5k + 1, \quad \bar{2} = 5k + 2, \quad \bar{3} = 5k + 3, \quad \bar{4} = 5k + 4$$

on en cada cas k pren tots els valors enters. Donem ara la següent

Definició. Dos nombres $a, b \in \mathbb{Z}$ són congrus (o congruents) segons el mòdul 5, i s'indica per $a \equiv b \pmod{5}$, quan pertanyen a la mateixa classe, és a dir, quan donen el mateix residu en dividir-los per 5.

És fàcil provar que $a \equiv b \pmod{5}$ si i només si $a - b$ és múltiple de 5. Per tant es pot donar la definició equivalent

Definició. Es diu que dos nombres enters a i b són congrus (o congruents) segons el mòdul 5 quan $a - b$ és múltiple de 5.

Les classes $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ s'anomenen classes de congruències mòdul 5.

Observem que el mateix que hem fet amb el 5, podem fer-ho agafant per mòdul qualsevol enter $m > 1$ i per tant donar en general la següent

Definició. Dos nombres enters a , b són congrus (o congruents) segons el mòdul m quan donen el mateix residu en dividir-los per m . S'escriu $a \equiv b \pmod{m}$.

O equivalentment

Definició. Dos nombres enters a , b són congrus (o congruents) segons el mòdul m quan la diferència $a - b$ és múltiple de m .

(Intentem demostrar l'equivalència d'aquestes dues definicions).

Segons el mòdul m es tenen m classes de congruència que corresponen als diferents residus $0, 1, 2, 3, \dots, m-1$ que s'obtenen en dividir un nombre enter per m .

La relació $a \equiv b \pmod{m}$ és una relació de congruència o abreviadament es diu que és una congruència.

Les congruències tenen les següents

Propietats.

- 1) Si $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, llavors $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- 2) Si $a \equiv b \pmod{m}$ i c és un enter qualsevol, llavors $ca \equiv cb \pmod{m}$.
- 3) Si $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, llavors $ac \equiv bd \pmod{m}$.
- 4) Si $a \equiv b \pmod{m}$ i d divideix m , llavors $a \equiv b \pmod{d}$
i $a \equiv b \pmod{m/d}$.
- 5) Si $ca \equiv cb \pmod{m}$ i $\text{mcd}(c, m) = 1$, llavors $a \equiv b \pmod{m}$.

Observeu que a la propietat 5) és necessari que $\text{mcd}(a, b) = 1$. Per exemple $10 \equiv 16 \pmod{6}$ i $5 \not\equiv 8 \pmod{6}$.

(Intentem demostrar aquestes propietats).

Apliquem ara les congruències a la resolució del problema proposat.

Ha de ser $5x^2 + 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$. Com que per tot enter x és $5x^2 \equiv 0 \pmod{5}$, els valors buscats seran tots els enters x més grans que 1 que satisfacin la congruència $3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$, o sigui $3x \equiv -2 \pmod{5}$. Però $-2 \equiv 3 \pmod{5}$ per tant $3x \equiv 3 \pmod{5}$ i simplificant $x \equiv 1 \pmod{5}$.

D'aquí resulta que les bases de numeració possibles són tots els enters de la forma $x = 5k + 1$ on k representa qualsevol enter positiu.

Problema 11. Trobeu tots els enters positius n tals que $2^n - 1$ és divisible per 7.

Solució. Escriviu l'enunciat en la forma $2^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ o sigui $2^n \equiv 1 \pmod{7}$. Només cal veure quines potències de 2 són congrues amb 1 segons el mòdul 7. Es té:

$$2^0 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 2^1 \equiv 2 \pmod{7}, \quad 2^2 \equiv 4 \pmod{7}, \quad 2^3 \equiv 1 \pmod{7}.$$

A partir d'aquí, per les propietats de les congruències, els residus s'aniran repetint de 3 en 3, és a dir

$$2^4 \equiv 2 \pmod{7}, \quad 2^5 \equiv 4 \pmod{7}, \quad 2^6 \equiv 1 \pmod{7}, \text{ etc.}$$

D'aquí resulta que

$$2^n \equiv 1 \pmod{7} \iff n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2^n \equiv 2 \pmod{7} \iff n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2^n \equiv 4 \pmod{7} \iff n \equiv 2 \pmod{3}.$$

Com que $2^n - 1$ és múltiple de 7 si i només si n és múltiple de 3, les solucions del problema són tots els enters positius múltiples de 3.

Fixeu-vos que a més a més de resoldre el problema proposat hem obtingut tots aquests altres resultats.

La solució amb enters positius de l'equació $2^n + 6 \equiv 0 \pmod{7}$ la formen tots els enters positius $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Les solucions amb enters positius de les equacions $2^n - 2 \equiv 0$ i $2^n + 5 \equiv 0 \pmod{7}$ les formen tots els enters positius $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Les solucions amb enters positius de les equacions $2^n - 4 \equiv 0$ i $2^n + 3 \equiv 0 \pmod{7}$ les formen tots els enters positius $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Les equacions $2^n - 6 \equiv 0$, $2^n + 1 \equiv 0$, $2^n - 3 \equiv 0$, $2^n + 4 \equiv 0 \pmod{7}$ no tenen solució amb enters positius.

Problema 12. Trobeu totes les parelles de nombres enters (x, y) tals que $x^2 = 21 + 4y^2$.

Aquest és un problema d'aritmètica que té una interpretació geomètrica important. L'equació donada es pot escriure en la forma $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1$, on reconeixem que es tracta de

l'equació d'una hipèrbola de semieixos $a = \sqrt{21}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{21}$. Per tant el problema s'hauria pogut enunciar així:

Trobeu tots els punts de coordenades enteres de la cònica $x^2 = 21 + 4y^2$.

Aquest és un cas particular del problema següent: Trobar els punts de coordenades enteres d'una cònica donada per una equació amb coeficients enters.

En general aquest és un problema d'aritmètica difícil, però en casos particulars com per exemple la nostra cònica, es pot resoldre fàcilment.

Si escrivim l'equació de la cònica en la forma $x^2 - 4y^2 = 21$, observarem que el primer membre és una diferència de quadrats i per tant es pot posar en la forma $(x - 2y)(x + 2y) = 21$. Com que x, y han de ser enters, també ho han de ser $x - 2y$, $x + 2y$ i aquests podran prendre tants valors com possibles descomposicions en factors enters del nombre 21. Com que $21 = 1 \cdot 21 = (-1) \cdot (-21) = 3 \cdot 7 = (-3) \cdot (-7)$, les solucions estaran entre les dels sistemes:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 21 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = 21 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ x + 2y = -21 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = -21 \\ x + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = 7 \\ x + 2y = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ x + 2y = -7 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = -7 \\ x + 2y = -3 \end{array} \right\}$$

Aquestes són respectivament $(11, 5)$, $(11, -5)$, $(-11, -5)$, $(-11, 5)$, $(5, 1)$, $(5, -1)$, $(-5, 1)$, i com que totes són enteres, totes són solucions del problema. Per tant els únics punts de coordenades enteres de la hipèrbola d'equació $x^2 = 21 + 4y^2$ són els que acabem de trobar. Intenteu dibuixar aquesta hipèrbola.

Problema 13. Per cada nombre natural n escrivim

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \qquad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

- a) Demostreu que a_n i b_n són senars per tot nombre natural n .
 b) Demostreu que b_n és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets

$$\frac{a_n + 1}{2}, \quad \frac{a_n - 1}{2}.$$

Observeu que en aquest cas es tracta de demostrar unes propietats que les satisfan tots els nombres naturals. Per als problemes d'aquest tipus és sempre molt útil tenir present una propietat que és característica del conjunt dels nombres naturals, i que ara enunciarem.

Principi d'inducció matemàtica.

Si C és un conjunt de nombres naturals que compleix

- 1) 1 pertany a C
- 2) si un nombre natural k pertany a C , el seu següent $k + 1$ també pertany a C

llavors C és el conjunt de tots els nombres naturals.

Aquest principi és un axioma pel conjunt dels nombres naturals, és a dir no es demostra. El podem aplicar sempre que volguem demostrar que una propietat és certa per tots els nombres naturals. N'hi ha prou a provar que és certa per a 1 i que si és certa per a un natural arbitrari k també ho és per al seu següent $k + 1$.

És interessant veure com induint podríem descobrir les propietats enunciades en el problema.

Part a). Calculeu el valor de l'expressió $(1 + \sqrt{2})^{2n+1}$ per uns quants nombres naturals consecutius, començant per $n = 1$.

$$n=1 \quad (1 + \sqrt{2})^3 = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2}$$

$$n=2 \quad (1 + \sqrt{2})^5 = (1 + \sqrt{2})^3(1 + \sqrt{2})^2 = (7 + 5\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 41 + 29\sqrt{2}$$

$$n=3 \quad (1 + \sqrt{2})^7 = (1 + \sqrt{2})^5(1 + \sqrt{2})^2 = (41 + 29\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 239 + 169\sqrt{2}$$

Podeu continuar un xic més donant a n uns quants valors més, i observem que en tots els casos és

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

on a_n i b_n són nombres enters imparells. Ens preguntem si això serà cert per tots els valors de n . La resposta la trobem aplicant el principi d'inducció.

Ja hem vist que és cert per a $n = 1$.

Suposem que és cert per a un natural qualsevol $n = k$, és a dir que se satisfà

$$(1 + \sqrt{2})^{2k+1} = a_k + b_k\sqrt{2}$$

on a_k i b_k són nombres naturals imparells. Calculem

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2})^{2(k+1)+1} &= (1 + \sqrt{2})^{2k+3} = (1 + \sqrt{2})^{2k+1}(1 + \sqrt{2})^2 = (a_k + b_k\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) \\ &= (3a_k + 4b_k) + (2a_k + 3b_k)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Com que a_k i b_k són per hipòtesi nombres naturals imparells, $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$ i $b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$ també seran imparells, i pel principi d'inducció seran imparells per tot valor natural de n .

Part b). És clar que en ser a_n imparell, $\frac{a_n - 1}{2}$ i $\frac{a_n + 1}{2}$ seran enters. Calculem-los per uns quants valors de n .

$$\begin{aligned}n = 1 \quad \frac{a_1 - 1}{2} &= 3 \quad \frac{a_1 + 1}{2} = 4 \quad b_1 = 5 \\ n = 2 \quad \frac{a_2 - 1}{2} &= 20 \quad \frac{a_2 + 1}{2} = 21 \quad b_2 = 29 \\ n = 3 \quad \frac{a_3 - 1}{2} &= 119 \quad \frac{a_3 + 1}{2} = 120 \quad b_3 = 169\end{aligned}$$

Observem que és $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$, $20^2 + 21^2 = 881 = 29^2$, $119^2 + 121^2 = 28651 = 169^2$ és a dir que les ternes $(3, 4, 5)$, $(20, 21, 29)$, $(119, 120, 169)$ són solucions de l'equació $x^2 + y^2 = z^2$ i per tant compleixen el teorema de Pitàgoras.

Per demostrar que per a tot n se satisfà

$$\left(\frac{a_n - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n + 1}{2}\right)^2 = b_n^2$$

escriuim aquesta igualtat en la forma

$$a_n^2 + 1 = 2b_n^2$$

que ja hem vist que és certa per a $n = 1$. Suposem que és certa per a un natural qualsevol $n = k$ és a dir que $a_k^2 + 1 = 2b_k^2$ i anem a provar que també ho és per a $n = k + 1$. Com que $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$ i $b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$ resulta

$$a_{k+1}^2 + 1 = (3a_k + 4b_k)^2 + 1 = 9a_k^2 + 24a_kb_k + 16b_k^2 + 1 = 8a_k^2 + 24a_kb_k + 18b_k^2 = 2(2a_k + 3b_k)^2 = 2b_{k+1}^2.$$

Pel principi d'inducció queda demostrat que per a tot natural n , $\frac{a_n - 1}{2}$ i $\frac{a_n + 1}{2}$ són els catets d'un triangle rectangle de hipotenusa b_n .

Problema 14. Proveu que si $n \in \mathbb{Z}$ és positiu i p és primer, llavors $n^p - n$ és múltiple de p .

Com que un enter positiu s'identifica amb un nombre natural podem aplicar el principi d'inducció.

Per a $n = 1$ és $1^p - 1 = 0$ i com que el zero és múltiple de tots els nombres, és múltiple de p .

Suposem que per a un nombre natural qualsevol k és $k^p - k$ múltiple de p , i calculem

$$\begin{aligned} (k+1)^p - (k+1) &= k^p + \binom{p}{1}k^{p-1} + \binom{p}{2}k^{p-2} + \dots + \binom{p}{j}k^{p-j} + \dots + \binom{p}{p-1}k + 1 \\ &\quad - (k+1) \\ &= k^p - k + \binom{p}{1}k^{p-1} + \binom{p}{2}k^{p-2} + \dots + \binom{p}{j}k^{p-j} + \dots + \binom{p}{p-1}k. \end{aligned}$$

Com que per la hipòtesi d'inducció $k^p - k$ és múltiple de p , només cal demostrar que la suma restant és múltiple de p . Demostrarem que cada sumand és múltiple de p (que és més fort que el que ens demanen), provant que $\binom{p}{j}k^{p-j}$ $j = 1, 2, \dots, p-1$ és múltiple de p . Sabem de la teoria combinatòria que

$$\binom{p}{j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}$$

i que és un nombre natural; pel problema 9 sabem que l'exponent en que figura p en $p!$ és 1, i com que $j < p$ i $p-j < p$ en $j!$ i en $(p-j)!$ hi figurarà amb exponent 0 per tant en el quocient $\frac{p!}{j!(p-j)!}$ amb exponent 1, és a dir és múltiple de p .

Als matemàtics, meditar sobre un problema resolt els porta quasi sempre a fer-se noves preguntes. Anem a fer-nos-en nosaltres. Fixeu-vos que a l'enunciat del problema s'imposa la condició que n sigui un enter positiu, i això ens ha permès fer la demostració per inducció.

Primera pregunta. És pot afirmar el mateix quan n és negatiu? És clar que la demostració per inducció no és vàlida. Però considereu alguns casos particulars. Per exemple poseu $p = 5$ i calculeu $n^5 - n$ per uns quants valors negatius de n , i trobareu que sempre és múltiple de 5. Abans de arriscar-nos a conjeturar res proveu per a alguns altres

nombres primers per exemple $p = 7, 11$ i trobareu que sempre se satisfà. Ara ens atrevim a conjecturar

Per tot enter a i tot primer p , $a^p - a$ és múltiple de p .

Cal intentar de trobar una demostració.

Per aixó posarem $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Si a és múltiple de p és obvi que $a(a^{p-1} - 1)$ és múltiple de p . Però si p no divideix a i la conjectura és certa, p ha de dividir $a^{p-1} - 1$ que és el que hem de demostrar. Això és cert, i és una proposició molt important d'aritmètica que s'anomena *Congruència de Fermat*, fent honor al matemàtic que la va enunciar per primera vegada. Pel seu nom ja deveu sospitar que per demostrar-la utilitzarem les congruències que varem introduir en el problema 10. Anunciarem la proposició així:

Congruència de Fermat. Si p és un nombre primer, i a un enter qualsevol primer amb p , és compleix

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Demostració. Considerem els nombres $1, 2, \dots, p-1$. Cadascun d'ells pertany a una classe diferent mòdul p , i com que són tots els residus possibles que es podem obtenir en dividir un enter per p , les classes a les quals pertanyen són totes les classes possibles. Considerem ara els nombres $a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (p-1)$. Aquests nombres són incongrus dos a dos ja que si $a \cdot k \equiv a \cdot l \pmod{p}$, $1 \leq k, l \leq p-1$ seria $a \cdot k - a \cdot l = a(k-l)$ múltiple de p i com que p no divideix a , p hauria de dividir $k-l$ o sigui que seria $k \equiv l \pmod{p}$ en contra del que hem dit abans. Per tant com que en tenim $p-1$, cadascun d'ells haurà de ser congru amb un i només un dels $1, 2, \dots, p-1$. Aplicant les propietats de les congruències és pot escriure

$$a \cdot 1 \cdot a \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdots a \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod{p}$$

o sigui $a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Com que $\text{mcd}(p, (p-1)!) = 1$ és pot simplificar la congruència dividint els dos membres per $(p-1)!$ i s'obté

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

que és el que volíem demostrar.

Segona pregunta. Què passa quan el mòdul no és un nombre primer? Comenceu amb un cas particular prenent, per exemple, per mòdul $m = 6$ i fent $a = 5$. És $\text{mcd}(5, 6) = 1$,

i $a^{m-1} = 5^5 \equiv 5 \pmod{6}$, per tant no es compleix la congruència de Fermat. Alguna cosa de la demostració falla quan el mòdul no és primer. Repaseu-la a veure si ho trobeu. Podriem deixar aquí la qüestió per acabada, però encara ens farem una

Tercera pregunta. Pot ser que per un altre exponent $\phi(m)$ relacionant amb el mòdul d'una manera que es pugui determinar, resulti que si $\text{mcd}(a, m) = 1$ és $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$? La resposta és afirmativa, i anem a veure qui pot ser $\phi(m)$. Hem vist que en el cas en què m no és primer, la interpretació de l'exponent com el mòdul menys 1 no és vàlida; però es pot trobar una altra interpretació de l'exponent que sí que sigui vàlida. Fixem-nos que si p és primer, els nombres $1, 2, 3, \dots, p-1$ són tots primers amb p , per tant $p-1$ és també el nombre de nombres naturals primers amb p i menors que p . Serà aquesta la interpretació vàlida de l'exponent? Tornem al cas $m = 6$. Els nombres primers amb 6 i menors que 6 són 1 i 5, és a dir n'hi ha dos. Calculem $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{6}$. És cert!. Proveu-ho per alguns altres nombres i veureu que sempre és cert. Si heu fet el que us he dit de mirar on fallava la demostració, probablement ja us haureu adonat que els nombres que presentaven dificultats eren els menors que m i no primers amb m , per tant la conclusió a la que hem arribat tampoc és estranya. Procedim a enunciar correctament i a demostrar la següent proposició que s'anomena

Congruència d'Euler. Si m és un nombre natural $m > 1$, a és un nombre enter primer amb m , i s'indica per $\phi(m)$ el nombre de nombres naturals primers amb m i menors que m , es compleix:

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Observeu que la congruència de Fermat és un cas particular de la congruència d'Euler.

Demostració. Siguin $b_1, b_2, \dots, b_{\phi(m)}$ tots els nombres naturals primers amb m i menors que m . Ara només cal seguir el raonament fet a la congruència de Fermat. Aquests nombres són incòngrus dos a dos segons el mòdul m . Com que $\text{mcd}(a, m) = 1$, els nombres $a \cdot b_1, a \cdot b_2, \dots, a \cdot b_{\phi(m)}$ seran també incòngrus dos a dos i cadascun d'ells congru amb un i només un dels $b_1, b_2, \dots, b_{\phi(m)}$. Per tant

$$a \cdot b_1 \cdot a \cdot b_2 \cdots a \cdot b_{\phi(m)} \equiv b_1 \cdot b_2 \cdots b_{\phi(m)} \pmod{m}$$

o sigui

$$a^{\phi(m)}(b_1 \cdot b_2 \cdots b_{\phi(m)}) \equiv b_1 \cdot b_2 \cdots b_{\phi(m)} \pmod{m}$$

Com que cada b_i és primer amb m és pot simplificar la congruència i s'obté

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

que és el que volíem demostrar.

Ens queda encara una

Quarta pregunta. Com podem calcular el nombre $\phi(m)$ anomenat *indicador* de m ? És clar que si m és un nombre primer $\phi(m)$ és $m - 1$. El pas següent que sembla natural fer és calcular $\phi(p^a)$ on p és un nombre primer. Els nombres menors que p^a i que són primers amb p^a són els nombres compresos entre 1 i p^a que no són múltiples de p . Com que múltiples de p n'hi ha p^{a-1} d'aquí resulta que

$$\phi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p - 1)$$

Si m no és la potència d'un primer podem pensar en descompondre m en factors primers, és a dir $m = p^{a_1} \cdot p^{a_2} \dots p^{a_n}$, però no sabem com es comporta l'indicador respecte del producte. Com sempre posem-nos un exemple. Volem calcular $\phi(18)$; si contem quants nombres hi ha primers amb 18 i menors que 18 veurem que n'hi ha 6. Posem $18=3 \cdot 6=2 \cdot 9$; si l'indicador del producte fós igual al producte dels indicadors resultaria $\phi(18)=\phi(3) \phi(6)=4$, la qual cosa és falsa. Però en canvi si posem $\phi(18)=\phi(2) \phi(9)=6$ i això és cert. Observem que l'indicador del producte no és sempre igual al producte dels indicadors dels factors; ha resultat fals en el cas en què els dos factors tenen un divisor comú, i vertader quan són primers entre si. El que hem observat és cert i podem enunciar la següent proposició que no demostrarem perquè encara no tenim tots els recursos necessaris.

Proposició. Si k i l són dos nombres naturals tals que $\text{mcd}(k, l) = 1$, llavors

$$\phi(k \cdot l) = \phi(k) \phi(l)$$

Aquesta proposició ens diu com hem de calcular $\phi(m)$. Si $m = p^{a_1} \cdot p^{a_2} \dots p^{a_n}$, com que $\text{mcd}(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1$ per $i, j = 1, 2, \dots, r$, es té la fórmula següent:

$$\phi(m) = p_1^{a_1-1} \cdot p_2^{a_2-1} \dots p_r^{a_r-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \dots (p_r - 1).$$

Encara un parell d'observacions.

1) La congruència d'Euler afirma que si $\text{mcd}(a, m) = 1$ és $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Però es poden donar casos que per alguns nombres a (que poden ser tots segons quin sigui el mòdul m) existeixin nombres k menor que $\phi(m)$ tals que $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. Per exemple per $m = 11$, $\phi(11) = 10$ però $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$. És clar que k ha de ser sempre un divisor de $\phi(m)$; efectivament 5 divideix 10.

2) Hem de fixar-nos molt bé en el que s'afirma en una proposició. Per exemple algú podria caure en la temptació de pensar que si segons un mòdul m es compleix la congruència de Fermat, aquest mòdul és primer. Això seria un gran error perquè afirmaria la recíproca de la congruència de Fermat. I efectivament no és cert, ja que existeixen nombres compostos que la compleixen, i aquests nombres s'anomenen nombres de Carmichael. El més petit d'ells és $m = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$, és a dir es compleix que si $\text{mcd}(a, 561) = 1$, $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

Problema 15. Proveu que $\sqrt{7}$ no és racional.

Aquest problema és equivalent a demostrar que l'equació $x^2 = 7$ no té cap solució en nombres racionals.

Observeu que n'hi ha prou provant que no té cap solució racional positiva, ja que si un nombre és solució també ho és el seu oposat.

És clar que no en té cap d'entera. Demostrarem que no en té cap de fraccionaria fent la demostració per reducció a l'absurd, que consisteix a suposar que té una solució i veure que s'arriba a una contradicció.

Suposem que $\frac{p}{q}$ és el representant irreductible d'una solució de l'equació $x^2 = 7$, és a dir, $\text{mcd}(p, q) = 1$ i $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 7$. D'aquí resulta $\frac{p^2}{q^2} = 7$, i $p^2 = 7q^2$. Com que 7 és primer i 7 divideix p^2 , també 7 divideix p . Posant $p = 7p'$ resulta $7^2(p')^2 = 7q^2$, i simplificant $7p'^2 = q^2$. Repetint el raonament, com que 7 és primer i divideix q^2 , també divideix q , per tant 7 divideix p i q contra l'hipòtesi de ser $\text{mcd}(p, q) = 1$.

Problema 16. Sigui la successió 3, 7, 11, 15,... Demostreu que en aquesta successió hi ha infinits nombres primers.

Aquest problema conté implícitament la afirmació que de nombres primers n'hi ha infinits, i això per ara no ho sabem, ja que podria ocórrer que a partir d'un nombre endavant tots els nombres naturals fossin compostos. Llavors el nostre problema no tindria sentit. Aquesta pregunta se la van formular els grecs i Euclides en va donar una resposta afirmativa

demostrant per reducció a l'absurd la següent

Proposició. La serie natural conté infinits primers.

La demostració és aquesta. Si només n'hi hagués un nombre finit hi hauria un primer p que seria el més gran. Formem el producte $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p$ de tots els nombres primers i considerem el nombre

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p + 1$$

Com que N és més gran que 1 o és primer o descompon en producte de factors primers. No pot ser primer perquè tots els primers figuren en el producte $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p$ i N és més gran que aquest producte, per tant més gran qualsevol dels factors. Sigui q un factor primer de N . Com que el producte $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p$ conté tots els nombres primers, q ha de ser un d'ells. Per tant com que q divideix N i divideix $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p$, q divideix 1, i això és una contradicció. D'aquí resulta que ha d'existir un primer q més gran que p i per tant, infinits.

Altres vegades hem anunciat una proposició i hem omès la demostració, però en aquest cas l'hem feta per veure com ens pot inspirar per resoldre el nostre problema. Observem que la proposició que hem demostrat la podríem enunciar de la forma equivalent:

La progressió aritmètica de terme general $2n + 1$ conté infinits nombres primers. Per altra part observem que la successió del problema és una progressió aritmètica de primer terme 3 i raó 4 és a dir de terme general $4n - 1$, $n = 1, 2, \dots$

Resolució del problema. Procedim com abans per reducció l'absurd, és a dir, suposem que a partir d'un primer endavant tots els primers són de la forma $4n + 1$, ja que tot nombre imparell és de una de les dues formes $4n - 1$ o $4n + 1$. Sigui p el primer més gran de la forma $4n - 1$. Seguint la demostració anterior formem un nombre N adequat

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p - 1$$

on el producte $3 \cdots (p - 1)$ conté tots els primers imparells menors o igual a p . Com que N és de la forma $4n - 1$ i és més gran que p no pot ser primer; per tant descompondrà en producte de factors primers. Tot primer que divideix N ha de ser més gran que p , ja que si no dividiria N i el producte $4 \cdot 3 \cdots p - 1$ i per tant dividiria 1, la qual cosa és absurda. Com que p és el més gran de la forma $4n - 1$, tot primer que divideixi a N ha de ser de la forma $4n + 1$ i per tan el seu producte N també de la forma $4n + 1$ i això és fals tal com s'ha construït N .

Per tant la progressió aritmètica considerada conté infinits nombres primers.

Observem que en el raonament que acabem de fer hi entra d'una manera molt clara la forma particular de la progressió. Això ja ens fa pensar que potser en alguns altres casos particulars és podran fer raonaments anàlegs, però que en general, per qualsevol progressió aritmètica no.

Considerem per exemple la progressió 5, 8, 11, 14,... és a dir la de terme general $4n + 1$, que és la primera que ens salta a la vista. Seguim el raonament anterior i veiem que tot va bé fins que arribem a formar el producte de primers de la forma $4n - 1$ ja que el producte d'un nombre parell d'ells és de la forma $4n + 1$ i per tant no hi ha contradicció.

Intentem cercar un altre camí de demostració que, per aquest cas, veurem que també el tenim; es tracta de demostrar que donat un nombre natural qualsevol $N > 1$ sempre existeix un primer de la forma $4n + 1$ que és més gran que n . Per això utilitzarem la Congruència de Fermat.

Considerem un nombre natural $N > 1$ i formem el nombre imparell

$$m = (N!)^2 + 1$$

Sigui p el factor primer més petit de m , que serà més gran que N ja que tot nombre menor o igual a N divideix $N!$. Com que p divideix $m = (N!)^2 + 1$ serà $(N!)^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Elevant els dos membres d'aquesta congruència al quadrat s'obté

$$(N!)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Com que p no divideix $N!$ per la congruència de Fermat és

$$(N!)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Per tant de les dues congruències resulta $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Si $\frac{p-1}{2}$ fos imparell seria $-1 \equiv 1 \pmod{p}$ és a dir $p = 2$ la qual cosa no és possible perquè m és imparell. Per tant $\frac{p-1}{2} = 2n$ és a dir p és de la forma $4n + 1$ i per tant pertany a la progressió donada.

Per a algunes altres progressions aritmètiques particulars podríem trobar mètodes com aquests (o encara que un xic més difícils), que sense gaire esforç es poden arribar a entendre. Però queda la pregunta general:

Tota progressió aritmètica conté infinits termes primers? La resposta és afirmativa si en té un. És clar que si el primer terme i la raó de la progressió tenen algun factor comú, la progressió no té cap terme primer. Però pels altres casos és compleix el següent

Teorema. Si $\text{mcd}(a, r) = 1$ la progressió aritmètica $a + rn$ $n = 1, 2, \dots$ conté infinits nombres primers.

Aquest és un teorema molt important de l'aritmètica, i és de demostració molt difícil. Es necessiten mètodes analítics que van més enllà, però molt més enllà, del que es pot entendre a aquests nivells.

Problema 17. Determineu tots els triangles rectangles de costats enters.

Aquest problema és equivalent al problema aritmètic següent:

Trobeu totes les solucions enteres positives de l'equació

$$X^2 + Y^2 = Z^2.$$

Observeu en primer.lloc que si tenim una solució (X_0, Y_0, Z_0) , qualsevol terna $(\lambda X_0, \lambda Y_0, \lambda Z_0)$, on λ és qualsevol nombre enter positiu, serà també solució; i si els tres membres de la terna tenen un divisor comú, s'obtindrà una altra solució dividint-los per aquest divisor comú. Per tant n'hi ha prou a cercar totes les solucions en les que X , Y , Z són primers entre si. Aquestes solucions s'anomenen primitives i a partir d'elles s'obtindran totes les altres multiplicant-les per tots els nombres naturals. També és clar per la forma de l'equació que, si els tres nombres X_0 , Y_0 , Z_0 són primers entre si, també seran primers entre si dos a dos. Feta aquesta observació, passem a resoldre el problema. Com que Z ha de ser diferent de 0, podem dividir els dos membres per Z^2 i s'obté l'equació

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 = 1$$

y posant $\frac{X}{Z} = x$, $\frac{Y}{Z} = y$ obtenim una equació de la forma

$$x^2 + y^2 = 1$$

que representa una circumferència de centre l'origen de coordenades i radi 1.

Si X , Y , Z són nombres enters $Z \neq 0$, $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ seran nombres racionals, i per tant a les solucions del nostre problema els corresponen punts racionals de la circumferència.

Intentem doncs de resoldre aquest altre

Problema. Trobeu tots els punts de coordenades racionals de la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 1$.

Obseveu en primer lloc que el punt $A(-1, 0)$ pertany a la circumferència. Escriviu l'equació del feix de rectes que passen per aquest punt $y = t(x + 1)$ on t és un paràmetre. Busqueu els punts d'intersecció de les rectes d'aquest feix amb la circumferència, resolent el sistema d'equacions amb les incògnites x, y

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = t(x + 1) \end{array} \right\}$$

Es té $x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$, o sigui $x^2 - 1 + t^2(x + 1)^2 = 0$ i traient $x + 1$ factor comú

$$(x + 1)(x - 1 + t^2(x + 1)) = 0$$

Una solució es troba fent $x + 1 = 0$, o sigui $x = -1$, que correspon al punt $A(-1, 0)$ que pertany a la circumferència i a totes les rectes del feix. L'altra s'obté resolent l'equació $x - 1 + t^2(x + 1) = 0$ o sigui $x(1 + t^2) = 1 - t^2$ d'on resulta

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = t(x + 1) = t \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 \right) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

A cada valor real de t correspondrà un punt de la circumferència i a cada punt de la circumferència menys $A(-1, 0)$ que ja l'havíem trobat abans, un valor real de t .

Si x, y son nombres racionals diferents de -1 , $t = \frac{y}{x + 1}$ serà un nombre racional, y si t és un nombre racional, pels resultats obtinguts x, y seran nombres racionals.

Suposeu t racional i sigui $\frac{m}{n}$ el seu representant irreductible. Substituint t per aquest valor a les expressions obtingudes per x, y resulta:

$$x = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}, \quad y = \frac{2mn}{n^2 + m^2}.$$

Donant a m i n tots els parells de valors enters primers entre si obtindreu tots els punts racionals de la circumferència $x^2 + y^2 = 1$ menys el punt $A(-1, 0)$.

Tornem al nostre problema:

Com que havíem posat $\frac{X}{Z} = x$, $\frac{Y}{Z} = y$ serà

$$\frac{X}{Z} = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{2mn}{n^2 + m^2}$$

i com que havíem suposat que $\text{mcd}(X, Z) = 1$, $\text{mcd}(Y, Z) = 1$ ha de ser

$$n^2 - m^2 = \lambda X, \quad 2mn = \lambda Y, \quad n^2 + m^2 = \lambda Z$$

per a algun valor enter de λ que cal calcular: λ divideix $n^2 - m^2$ i $n^2 + m^2$ i per tant divideix la seva suma $2n^2$ i la seva diferència $2m^2$, i per tant ha de dividir 2 ja que hem suposat m i n primers entre si. És a dir λ només pot ser 1 o 2. Anem a veure que no pot ser 2.

X , Y no poden ser a la vegada parells ni a la vegada imparells. El primer és clar ja que $\text{mcd}(X, Y) = 1$. Si fossin ambdós imparells, observant que el quadrat d'un nombre imparell és sempre congru amb 1 segons el mòdul 4, seria $X^2 + Y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ i $Z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Per tant o bé X serà parell i Y imparell o al revés, però n'hi ha prou en considerar un dels dos casos ja que l'equació $X^2 + Y^2 = Z^2$ és simètrica respecte les incògnites X , Y . Suposem X parell i $\lambda = 2$. λX seria divisible per 2 però no per 4 i $n^2 - m^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Però m^2 i n^2 seran o un congru amb 0 i l'altre congru amb 1 segons el mòdul 4 o tots dos seran congrus amb 1 segons el mòdul 4. Per tant λ no pot ser 2; és a dir ha de ser $\lambda = 1$. Hem arribat així a la solució del problema:

Les longituds dels costats dels triangles rectangles primitius s'obtenen posant

$$X = n^2 - m^2, \quad Y = 2mn, \quad Z = n^2 + m^2$$

i donant a m , n totes les parelles de valors naturals possibles primers entre si.

Problema 18. Trobeu totes les solucions amb nombres naturals de l'equació

$$x^3 + y^3 = 1729.$$

Si mireu un xic detingudament el nombre 1729, observareu sense gran esforç que

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3 \quad \text{i també} \quad 1729 = 1 + 1728 = 1^3 + 12^3$$

per tant ja heu obtingut les quatre solucions

$$x = 10, y = 9; \quad x = 9, y = 10; \quad x = 1, y = 12; \quad x = 12, y = 1.$$

Però el problema ens les demana totes. N'hi ha d'altres? Anem a veure que són les úniques. Per això escrivim l'equació proposada d'una altra manera observant que

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad \text{i que} \quad 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19.$$

$$\text{i per tant} \quad (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 7 \cdot 13 \cdot 17.$$

Ara es tracta d'igualar de totes les maneres possibles els factors del primer membre amb factors del segon membre, però per evitar-nos feina farem un raonament més general. Posem

$$\left. \begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 - xy + y^2 = b \end{array} \right\} \quad \text{amb} \quad ab = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$$

Resolem el sistema d'equacions aïllant x a la primera i substituint a la segona; després de fer operacions arribem a l'equació de segon grau

$$3x^2 - 3ax + a^2 - b = 0.$$

Per tant

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{12b - 3a^2}}{6}$$

Mirem totes les condicions que han de satisfer a i b . Recordem que $a \cdot b = 7 \cdot 13 \cdot 19$; a més a més ha de ser $a > 1$, $12b - 3a^2 \geq 0$ i quadrat d'un nombre enter. Amb aquestes condicions veureu tot seguit que els únics valors de a i b són $a = 13$, $b = 7 \cdot 19$; $a = 19$, $b = 7 \cdot 13$; a aquests valors corresponen els valors de x , y que havíem obtingut al principi. Per tant aquelles són les úniques solucions

Problemes

AR1.—Proveu que si els tres costats d'un triangle rectangle vénen expressats per tres nombres naturals en progressió aritmètica llavors el seu perímetre és múltiple de 12.

AR2.—Els tres nombres naturals $1652_{(n)}$, $2012_{(n)}$, $2042_{(n)}$ (escrits en base n) estan en progressió aritmètica. Determineu la base n de numeració i la raó de la progressió.

AR3.—Un nombre de tres xifres en base 10 s'escriu xyz en el sistema de base 7 i zyx en el sistema de base 9. Determineu aquest nombre escrit en base 10.

AR4.—Proveu que l'única parella d'enters positius (a, b) per a la qual la suma coincideix amb el producte és la $(2, 2)$.

AR5.—Proveu que només hi ha una parella d'enters positius (a, b) tal que $a^b = b^a$ i trobeu-la.

AR6.—Resoleu en el conjunt dels nombres naturals l'equació

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} = 1.4375 .$$

AR7.—En un nombre de tres xifres, la suma d'elles és 15, la xifra de les unitats és doble de la de les desenes, i la diferència entre el nombre i el que resulta d'invertir les xifres és 297. Determineu aquest nombre.

Discuti el problema en el cas general, és a dir si la suma de les xifres és s i la diferència que s'obté en invertir l'ordre de les seves xifres és d .

AR8.—Trobeu els valors naturals de x per als quals $x^2 + 5x + 160$ és un quadrat perfecte.

AR9.—Determineu els enters N que contenen solament els factors 2 i 3 i tals que el nombre de divisors de N^2 és triple del nombre de divisors de N .

AR10.—Un nombre té 216 divisors, el seu doble té 270 divisors, la seva tercera part té 180 divisors i la seva cinquena part té 144 divisors. Trobeu aquest nombre amb la condició que sigui el més petit possible.

AR11.—Trobeu un nombre de quatre xifres, quadrat perfecte, sabent que la suma de les seves xifres és igual a la suma de les xifres de la seva arrel quadrada. Determineu totes les solucions.

AR12.—Demostreu que per a tot valor natural de n ,

$$3^{2n+2} + 2^{6n+1}$$

és múltiple de 11.

AR13.—Una pila de boles de base rectangular té a la base $m \cdot n$ boles i les altres capes es formen col·locant una bola en el forat que deixen les quatre boles de la capa anterior, i així successivament fins que s'arriba a una capa formada per una sola fila. Calculeu quantes boles té la pila sabent que m és el nombre de diagonals que té un decàgon i n és el menor nombre que dividit per 4 dóna residu 3, dividit per 5 dóna residu 4 i dividit per 6 dóna residu 5.

AR14.—Determineu en quants zeros acaba $1000!$

AR15.—Proveu que $\pi(n) \geq \frac{\log n}{\log 4}$, on $\pi(n)$ és el nombre de primers que no sobrepassen el nombre natural n . (Teorema de Wacław Sierpinski).

AR16.—Determineu x, y i z per tal que el nombre $33xy49z$ (escrit en base 10) sigui múltiple de 693.

AR17.—Calculeu dos nombres de la forma $aa, bbcc$ tals que

$$aa = \sqrt{bbcc}.$$

AR18.—Calculeu l'enter més petit x pel qual $x^2 + x + 41$ és compost.

AR19.—Demostreu que si dos nombres enters són de la mateixa paritat, la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.

AR20.—a) Trobeu tots els enters positius n tals que $2^n - 1$ és divisible per 7.

b) Demostreu que no existeix cap enter positiu tal que $2^n + 1$ és divisible per 7.

AR21.—Demostreu que si $2^n - 1$ és primer, llavors n és primer.

AR22.—Demostreu

a) Per tot n existeixen n nombres consecutius compostos.

b) Per tot n existeixen n nombres consecutius tals que cap d'ells és la potència d'un primer.

AR23.—Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6 per tal que el seu producte acabi en 36.

Aritmètica

AR24.—Troheu els nombres de quatre xifres que són iguals al quadrat de la suma del nombre format per les dues primeres xifres i el format per les dues darreres xifres.

AR25.—Proveu que $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ no pot ser expressat com a producte de menys de n primers (no necessàriament diferents).

AR26.—El nombre natural

$$3^n + 2 \cdot 17^n$$

no és quadrat perfecte per cap natural n .

AR27.—La suma dels dígit de $N = 4444^{4444}$ (escrit en notació decimal) és A . La suma dels dígit de A és B i la suma dels dígit de B és C . Calculeu C .

AR28.—Siguin n, m nombres naturals qualssevol. Demostreu que

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

és un enter.

AR29.—Demostreu que si a i b són enters positius, llavors, si

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

és un enter, és un quadrat perfecte.

AR30.—Un nombre natural és perfecte si és igual a la suma dels seus divisors menors que ell. Demostreu que si $2^n - 1$ és primer llavors $2^{n-1}(2^n - 1)$ és perfecte.

AR31.—Proveu que si p és un nombre primer diferent de 2 i 5, p divideix infinits termes de la successió 9, 99, 999, 9999,... Proveu el mateix per la successió 1, 11, 111, 1111,...

AR32.—Proveu que $n^2 + 3n + 5$ no és mai divisible per 121.

AR33.—Proveu que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ és divisible per 7.

AR34.—Proveu que si tots els coeficients de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ són imparells, les arrels d'aquesta equació no poden ser racionals.

AR35.—Proveu que tots els nombres de la forma 10001, 100010001, 1000100010001,...són compostos.

AR36.—Trobeu totes les solucions en nombres enters de l'equació

$$x^2y^2 = 5x^2y + 20x + 16.$$

AR37.—Si $T_0 = 2$, $T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1$, proveu que $\text{mcd}(T_n, T_m) = 1$, $m \neq n$.

AR38.—Proveu que $1^{1983} + 2^{1983} + \dots + 1986^{1983} \equiv 0 \pmod{1987}$.

AR39.—Si a , b , x , y són nombres naturals, $\text{mcd}(a, b) = 1$ i $x^a = y^b$, proveu que existeix un nombre natural n tal que $x = n^b$, $y = n^a$.

AR40.—Trobeu totes les solucions en nombres naturals del sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(b + c) \end{aligned} \right\}$$

AR41.—Proveu que l'equació $x^2 + y^2 = 3z^2$ només té en nombres enters la solució $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Com a conseqüència proveu que la circumferència $x^2 + y^2 = 3$ no té cap punt de coordenades racionals.

AR42.—Trobeu tots els punts de coordenades racionals de la circumferència $x^2 + y^2 = 2$.

AR43.—Trobeu totes les solucions amb nombres enters de l'equació $x^3 + y^3 = 793$.

AR44.—Proveu que si p és un nombre primer imparell, l'equació $x^3 + y^3 = p$ o bé no té cap solució en nombres enters, o bé p és de la forma $3n^2 + 3n + 1$.

Mostra de solucions

Solució del problema AR4

La condició $ab = a + b$ es pot escriure $(a-1)(b-1) = 1$ que només té les solucions enteres $a-1 = 1, b-1 = 1$ o bé $a-1 = -1, b-1 = -1$. La segona parella queda exclosa perquè dóna $a = 0, b = 0$. La primera dóna $a = 2, b = 2$.

Si a, b fossin racionals (o reals), l'equació tindria una infinitat de solucions

$$a = \frac{b}{b-1}$$

on b és un racional (real) arbitrari diferent de 1.

Solució del problema AR5

Suposem $a^b = b^a$ amb $1 < a < b$ enters positius. Podem escriure $b = a + n$ amb $n \geq 1$ i queda $b^a = a^b = a^{a+n} = a^a a^n$ d'on surt $a^n = (b/a)^a$. Si fem $\lambda = b/a > 1$ queda $b = \lambda a$ i $n = b - a = a(\lambda - 1)$. Substituint, $a^{a(\lambda-1)} = \lambda^a$ o bé $a^{\lambda-1} = \lambda$, d'on, fent $a = 1 + k$, queda $\lambda = (1 + k)^{\lambda-1}$ o bé

$$(\lambda - 1)(k - 1) + \binom{\lambda - 1}{2} k^2 + \dots + \binom{\lambda - 1}{\lambda - 1} k^{\lambda-1} = 0.$$

En ser tots els termes no negatius, només s'anulla l'expressió si tots són nuls. Tenim, doncs, que ha de ser $k = 1$ o bé $\lambda = 1$. Aquest darrer cas ens dóna el cas trivial $a = b$.

Si $k = 1$ queda $a = 2$ i $2^{\lambda-1} = \lambda$ que només es compleix per $\lambda = 2$, d'on $b = 4$.

Si suposem que a i b són racionals amb $b > a$ podem posar

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{p}{q}$$

i la igualtat $a^b = b^a$ queda $a^{a(1+\frac{p}{q})} = (a(1+\frac{p}{q}))^a$ i substituint dóna lloc a

$$a = \left(1 + \frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p}} \quad b = \left(1 + \frac{p}{q}\right)^{\frac{p+q}{p}}.$$

Per tal que a i b siguin racionals cal que tant q com $p + q$ siguin, simultàniament, arrels p -èsimes exactes. Però això és impossible si $p \neq 1$. En efecte, si q no és arrel exacta, ja hem acabat. Si ho és, serà $q = r^p$, $r > 1$. Queda

$$(r+1)^p = r^p + pr^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} r^{p-2} + \dots,$$

i com que $r^p = q$, $pr^{p-1} > p$ i els altres termes són no negatius, queda $(r+1)^p > p+q$, de forma que $p+q$ queda entre dues potències consecutives d'exponent p i no pot ser potència entera exacta. En conclusió, $p = 1$ i finalment

$$a = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q \quad b = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{q+1}.$$

Una simple comprovació demostra que aquests nombres compleixen l'equació.

Solució del problema AR15

Siguin $2, 3, \dots, p_{\pi(n)}$ els nombres primers que són més petits o iguals que n . Qualsevol natural $m \leq n$ el podem escriure en la forma

$$m = m_1^2 \cdot 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \dots p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}$$

on els a_i només poden prendre valors 0,1. Si donem valors 0,1 de totes les maneres possibles als a_i obtindrem tots els nombres més petits o iguals a n que són lliures de quadrats; el nombre total obtingut serà $2^{\pi(n)}$. Com que $m_1^2 \leq m \leq n$, serà $m_1 \leq \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$. Si volem obtenir tots els nombres menors o iguals a n haurem de multiplicar els $2^{\pi(n)}$ lliures de quadrats per tots els m_1 que compleixin la condició $m_1 \leq \sqrt{n}$. Per tant, el nombre total de nombres més petits o iguals que n , que és n , ha de complir $n \leq \sqrt{n} 2^{\pi(n)}$. Fent operacions queda $\sqrt{n} \leq 2^{\pi(n)}$ o bé, prenent logaritmes, $\log n \leq \pi(n) \log 2$, i d'aquí el resultat.

Observació: Com que el logaritme tendeix a infinit, deduïm que $\pi(n)$ també ho fa, i demostrem altra vegada la infinitud dels primers. Però la fita inferior de l'enunciat és molt poc fina: per exemple, $\pi(1000) = 168$ i $\log 1000 / \log 2 = 9.97$.

Solució del problema AR25

Usarem la igualtat $2^{2^n} = (2^{2^{n-1}})^2$ i la identitat $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$.
 Procedirem per inducció sobre n . Per a $n = 1$ no hi ha res a demostrar. Suposant-ho cert per a n , tenim

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 = (2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1)$$

i com que el primer factor s'expressa, per hipòtesi d'inducció, com a producte de n primers com a mínim, i el segon en té un com a mínim, resulta que en total n'hi ha $n + 1$ com a mínim.

POLINOMIS

Lluís Bibiloni i Matos, Pelegrí Viader i Canals

Introducció

Designarem un polinomi de grau n de la variable x mitjançant la notació

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Així, a_k sempre denotarà el coeficient del monomi de grau k . En principi els coeficients seran nombres reals i, aleshores, direm que $P(x)$ és un polinomi a coeficients reals i escriurem $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (o complexos, $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, encara que llavors s'acostuma a especificar aquesta circumstància).

El grau d'un monomi $a_k x^k$, $a_k \neq 0$, és el nombre natural k . El grau d'un polinomi és el grau del monomi de grau màxim. Les constants es consideren polinomis de grau 0. El polinomi 0, és a dir, el polinomi idènticament nul, no té grau. En la major part dels problemes, els coeficients acostumen a ser enters ($P(x) \in \mathbb{Z}[x]$) o racionals ($P(x) \in \mathbb{Q}[x]$). Cal recordar que els polinomis són una subclasse de les expressions algebraïques d'una variable. Són les expressions algebraïques enteres, és a dir, que les operacions que lliguen les variables i els coeficients son la suma, la resta i la multiplicació.

Definició.- Dos polinomis o, en general, dues expressions algebraïques de qualsevol nombre de variables s'anomenen *equivalents* si prenen el mateix valor numèric per a qualsevol sistema de valors que assignem a les variables.

Exemples d'expressions equivalents són les ben conegudes identitats de suma i diferència del quadrat d'un binomi; en símbols:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

o la seva generalització coneguda com la fórmula del binomi de Newton. En el cas important

$a = 1, b = x$ la fórmula de Newton agafa la forma:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

El principi d'identitat

Definició.- Un polinomi s'anomena *idènticament nul* quan els seus coeficients són zero.

Definició.- Dos polinomis s'anomenen *idèntics* quan tenen el mateix grau i els mateixos coeficients.

Per tant, dos polinomis són idèntics quan la seva diferència és un polinomi idènticament nul. La importància d'aquestes definicions rau en el

Principi d'Identitat: Dos polinomis són idèntics si, i només si, són equivalents.

Esquema d'una demostració: Si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ i $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ són equivalents (s'acostuma a escriure $P(x) \equiv Q(x)$), en particular han de coincidir per $x = 0$ de manera que $a_0 = P(0) = Q(0) = b_0$, així, doncs, per a tot valor d' x serà

$$a_1x + \cdots + a_nx^n = b_1x + \cdots + b_mx^m.$$

Això es pot escriure

$$xP_1(x) = x(a_1 + \cdots + a_nx^{n-1}) = x(b_1 + \cdots + b_mx^{m-1}) = xQ_1(x)$$

per a tot valor d' x . En altres paraules $xP_1(x) \equiv xQ_1(x)$. D'això en podem concloure que $P_1(x) = Q_1(x)$ sempre que $x \neq 0$ però per poder derivar que $a_1 = b_1$ (i arribar a una demostració per inducció), necessitem poder assegurar que $P_1(0) = Q_1(0)$ i això s'ha de demostrar. Coneixeu algun argument que garanteix la veritat d'aquesta afirmació?

Per una demostració alternativa vegeu el problema PL5

A l'hora de resoldre problemes, la conseqüència més important del Principi d'Identitat és l'anomenat *mètode dels coeficients indeterminats*. Explicarem en què consisteix aquest mètode resolent el següent problema de tothom conegut.

Les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ admeten l'expressió

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solució: És obvi que les solucions de l'equació de segon grau $\gamma(x - \alpha)^2 + \beta = 0$ són

$$x_1 = \alpha + \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, \quad x_2 = \alpha - \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}.$$

D'altra banda, és clar que si dos polinomis són equivalents, han de tenir les mateixes arrels. Per tant, el problema quedarà resolt si sabem determinar α, β i γ de manera que $ax^2 + bx + c$ i $\gamma(x - \alpha)^2 + \beta$ siguin equivalents. És evident que $\gamma(x - \alpha)^2 + \beta$ és equivalent a $\gamma x^2 - 2\gamma\alpha x + \gamma\alpha^2 + \beta$ i del principi d'identitat obtenim que aquest últim polinomi i $ax^2 + bx + c$ són equivalents si, i només si,

$$\begin{cases} a = \gamma \\ b = 2\gamma\alpha \\ c = \gamma\alpha^2 + \beta. \end{cases}$$

Queda a càrrec del lector discutir i resoldre aquest sistema d'equacions en les incògnites α, β i γ i acabar el problema a la seva satisfacció.

PL1.—Trobeu tots els nombres primers de la forma $n^4 + 4$.

Indicació: Factoritzeu el polinomi $x^4 + 4$ en producte de dos polinomis de segon grau utilitzant el mètode dels coeficients indeterminats.

PL2.—(XXIV Olimpíada Espanyola.) Calculeu per a qualsevol valor del paràmetre enter t , solucions enteres x, y de l'equació

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39)$$

Alguns identitats remarcables.

- $\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$
- $\frac{x^n + a^n}{x - a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és senar: $\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1}$
- Si n és parell: $\frac{x^n + a^n}{x + a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és parell: $\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1}$.
- Si n és senar: $\frac{x^n - a^n}{x + a}$ la divisió no és exacta.

El cas $a = 1$ és de molta importància (suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica):

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1.$$

De passada, ja que som aquí, esmentem que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (\text{sèrie infinita}). \text{ La igualtat val només si } |x| < 1.$$

D'aquí, per substitució directa s'obté (per $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (\text{signes alternats}).$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots$$

PL3.—Demostreu que per a tot $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} = (1 + x)(1 + x^2) \cdots (1 + x^{2^n}).$$

Aritmètica de Polinomis.

Suposem conegudes les operacions algebraiques habituals, incloent la divisió entera de polinomis i la propietat fonamental que afirma el grau del producte de dos polinomis és la suma dels graus dels factors.

Les propietats que llistem a continuació són vàlides pels polinomis a coeficients racionals, reals i complexos.

• Càlcul del màxim comú divisor de dos polinomis utilitzant l'algorisme d'Euclides. Si $R(x)$ és el residu de dividir $P(x)$ per $Q(x)$, els divisors comuns de $P(x)$ i $Q(x)$ són els mateixos que els divisors comuns de $Q(x)$ i $R(x)$. L'algorisme consisteix en anar fent les divisions següents:

$$\begin{array}{ll} P(x) = C_1(x)Q(x) + R_1(x) & \text{grau de } R_1(x) < \text{grau de } Q(x); \\ Q(x) = C_2(x)R_1(x) + R_2(x) & \text{grau de } R_2(x) < \text{grau de } R_1(x); \\ R_1(x) = C_3(x)R_2(x) + R_3(x) & \text{grau de } R_3(x) < \text{grau de } R_2(x); \\ \dots & \dots \\ R_{k-2}(x) = C_k(x)R_{k-1}(x) + R_k(x) & \text{grau de } R_k(x) < \text{grau de } R_{k-1}(x); \\ R_{k-1}(x) = C_{k+1}(x)R_k(x). & \end{array}$$

Si $R_k(x)$ és una constant, direm que $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = 1$, i que $P(x)$ i $Q(x)$ són primers entre sí. En altre cas, $\text{mcd}(P(x), Q(x)) = R_k(x)$.

• Mínim comú múltiple. Es pot calcular com el producte dels polinomis dividit pel màxim comú divisor.

• Concepte de polinomi irreductible: Un polinomi és *irreductible* o *primer* quan no es pot expressar com a producte de polinomis de grau inferior. Cal parar compte en el fet que un polinomi pot ser irreductible a $\mathbb{Q}[x]$ i ser reductible, per exemple, a $\mathbb{R}[x]$ o a $\mathbb{C}[x]$. Trobeu-ne exemples.

• Igual que en el cas dels nombres enters, tenim el

Teorema de la factorització única: Tot polinomi a coeficients racionals es pot expressar de manera única com a producte de polinomis irreductibles.

• Avaluació d'un polinomi per un valor concret de la variable utilitzant el: **Teorema del residu:** El residu de dividir $P(x)$ per $x - a$ és $P(a)$. La divisió és convenient fer-la pel mètode de Ruffini.

PL4.—Demostreu que $x^2 - 2$ és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$.

Arrels.

Si $P(a) = 0$, es diu que el nombre a és una *arrel* del polinomi $P(x)$. Fixeu-vos que si a es una arrel de $P(x)$, el teorema del residu ens afirma que $x - a$ és un divisor de $P(x)$, és a dir, $P(x) = C(x)(x - a)$.

PL5.—Demostreu que un polinomi de grau $n > 0$ no pot tenir més de n arrels.

Utilitzeu aquest resultat per derivar una demostració del Principi d'Identitat. (De fet, es tracta de provar una afirmació més forta que implica aquest enunciat: vegeu el problema següent).

PL6.—Demostreu que si un polinomi de grau n s'anul·la per més de n valors de la variable, aleshores el polinomi és idènticament nul.

Quan s'admeten arrels complexes, el resultat contingut en el problema **PL5** es completa amb l'important:

Teorema Fonamental de l'Àlgebra, que ens assegura que un polinomi de grau n té exactament n arrels, que poden ser complexes.

Això implica que en el camp complex, els únics polinomis irreductibles són els polinomis de grau 1.

Si els coeficients del polinomi són nombres reals, les arrels complexes s'han de presentar de dues en dues ja que si $a + bi$ és arrel, $a - bi$ (el complex conjugat) també ho és (demostreu-ho). Això justifica el següent resultat: *un polinomi amb coeficients reals i grau imparell té almenys una arrel real*.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ són les n arrels del polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ de grau n , el polinomi admet la descomposició en factors lineals:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n).$$

S'ha de parar compte amb el a_n del davant, és fàcil d'oblidar-lo. Si hi ha arrels múltiples, els factors iguals es poden agrupar:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_s)^{r_s}.$$

La relació

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv a_n(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_s)^{r_s}$$

i el Principi d'identitat impliquen que els coeficients de $P(x)$ s'expressen en funció de les seves arrels mitjançant les anomenades fórmules de Cardano:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\dots \\ \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n},\end{aligned}$$

és a dir, la suma de tots els possibles productes de k arrels és exactament el coeficient de x^{n-k} dividit per a_n amb signe $(-1)^k$.

PL7.—L'equació $x^3 + 3x^2 + qx + 3q = 0$ té dues solucions que sumen 0. Calculeu, si és possible, el coeficient q i trobeu totes les solucions.

Els primers membres de les fórmules de Cardano tenen la propietat de ser invariants per permutacions de les arrels (és a dir, són *funcions simètriques* de les seves variables, cosa que vol dir que no canvien de valor si intercanviem α_i per α_j , etc.). Són les anomenades *funcions simètriques elementals*. Un resultat important i útil a l'hora de resoldre problemes és el teorema següent: *Qualsevol funció racional simètrica de les arrels d'un polinomi s'expressa com a funció racional dels coeficients i recíprocament.*

A la pràctica, trobar l'expressió concreta d'una determinada funció simètrica de les arrels no és fàcil. Per exemple:

PL8.—Siguin a, b, c les arrels del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$. Trobeu el valor de $a^4 + b^4 + c^4$.

PL9.—(XXVII Olimpíada Espanyola.) Considereu l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $r \neq 0$, que suposem admet tres arrels reals i positives, a, b, c . Determineu la relació que ha de lligar els nombres p, q i r per tal que els tres nombres a, b, c puguin ésser les longituds dels costats d'un triangle.

(Indicació: Suposeu les arrels ordenades $a \geq b \geq c$ i expresseu la condició de poder formar triangle com una desigualtat que involucri una funció simètrica de a, b, c .)

De les relacions de Cardano, l'última és la més útil. Ens diu que el producte de totes les arrels i a_n és igual al terme independent, amb el signe corresponent:

$$a_n\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n a_0.$$

Si els coeficients del polinomi són enters, llavors aquesta última relació ens demostra que si α_k és una arrel entera del polinomi, ha de ser forçosament un dels divisors de a_0 amb signe + o -. No és difícil deduir també que si α_k és una arrel fraccionària del polinomi, diguem p/q , llavors p ha de ser un divisor de a_0 (amb signe + o -) i q ha de ser un divisor de a_n . En particular, si $a_n = 1$ el polinomi no pot tenir arrels fraccionàries, llevat de les enteres.

No és difícil tampoc obtenir el següents resultats:

PL10.—Si $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, i $P(0)$ i $P(1)$ són imparells, el polinomi no té arrels enteres.

PL11.—Si cap dels nombres $P(-1), P(0), P(1)$ és múltiple de 3, el polinomi $P \in \mathbb{Z}[x]$ no té arrels enteres.

PL12.—Si un polinomi té una arrel de multiplicitat r , el polinomi derivat té també la mateixa arrel amb multiplicitat $r - 1$. Com a conseqüència, si un polinomi no té arrels múltiples, $\text{mcd}(P(x), P'(x)) = 1$.

Si α és arrel múltiple de $P(x)$ de grau n , també és arrel del polinomi $P(x) - Q(x) \cdot P'(x)$ on $Q(x)$ és qualsevol polinomi. Un cas particular interessant és dona quan $Q(x) = x/n$ ja que aleshores els polinomi $P(x) - P'(x) \cdot (x/n)$ té grau $n - 1$.

Fitació de les arrels.

Hi ha moltes maneres de donar fites superiors de les arrels positives d'un polinomi. Una de senzilla i fàcil d'obtenir és la fita de MacLaurin: totes les arrels positives es mantenen inferiors que el nombre $1 + N/a_n$ on N és el màxim valor absolut dels coeficients negatius. En general es compleix:

Regla de Laguerre-Thibault:

Si en dividir un polinomi per $x - L$, (on L és un nombre positiu) tots els coeficients del quocient i el residu són positius, L és una fita superior de les arrels del polinomi. Una manera pràctica de fer això és efectuar la divisió per Ruffini i observar que tots els signes del resultat són positius.

PL13.—Demostreu la Regla de Laguerre-Thibault i que la fita de MacLaurin és realment una fita superior de les arrels.

Regla de Descartes

Si $P(x)$ té els coeficients reals, el nombre total d'arrels reals positives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients (se suposa el polinomi ben ordenat; si alguns coeficients són 0, no s'han de tenir en compte per a calcular el nombre de canvis de signe). De la mateixa manera, el nombre total d'arrels reals negatives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients del polinomi $P(-x)$. En qualsevol cas, la diferència entre el nombre d'arrels i el nombre de canvis de signe és sempre un nombre *parell*. La Regla de Descartes només és útil en determinades condicions "extremes". Si no hi ha canvis de signe, llavors *segur* que no hi ha arrels positives; si només hi ha un canvi de signe *segur* que només hi ha una arrel positiva.

PL14.—Verifiqueu que el polinomi $x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$ té com a màxim 5 arrels positives i 2 de negatives. Demostreu que, com a mínim, té 4 arrels complexes.

PL15.—(XXIII Olimpíada Espanyola.) Per a cada nombre natural n considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{2n+1} - 2x + 1.$$

- a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel c_n i només una a l'interval $(0, 1)$.
- b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Canvis de variable

PL16.—Demostreu que si en un polinomi canviem x per:

- a) $-x$, aleshores les arrels canvien de signe.
- b) $x + a$, aleshores les arrels queden sumades amb $-a$.
- c) βx , aleshores les arrels queden multiplicades per $1/\beta$.
- d) $1/x$, aleshores les arrels queden invertides.

(S'entén sempre que ens referim a la relació entre les arrels del nou polinomi i les del vell.)

Aquests últims resultats són força útils en molts problemes. Canviar la x per $x - a$ pot ser difícil en alguns casos, donat el càlcul que això representa. De vegades, per a fer això,

pot ser útil recordar el *Teorema de Taylor*:

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si fem $a = 0$, trobem una manera interessant d'expressar els coeficients d'un polinomi:
 $a_k = P^{(k)}(0)/k!$

Polinomis especials.

PL17.—Els polinomis de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ amb $a \neq 0$ s'anomenen polinomis recíprocs de quart grau. Demostreu

- Si α és arrel, aleshores $1/\alpha$ també ho és.
- Es poden trobar les arrels dividint tot el polinomi per x^2 i fent el canvi $y = x + 1/x$.

Els polinomis de la forma $x^n - 1$ són especialment importants. Les seves arrels són fàcils de trobar: $x = \sqrt[n]{1}$.

Recorrent a la radicació complexa mitjançant la fórmula de Moivre:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta,$$

s'obté

$$1, \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \dots, \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Aquests nombres complexos, tots de mòdul 1, s'anomenen les *arrels n -èsimes de la unitat*. Si les dibuixem al pla complex, es distribueixen regularment sobre el cercle unitat i unint els extrems dels afixos corresponents obtenim un n -àgon regular. Entre aquestes arrels n -èsimes de la unitat n'hi ha que tenen la propietat de “generar” totes les altres en el sentit següent: $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots, \xi^{n-1}$ són totes les arrels n -èsimes de la unitat. Direm que ξ és una *arrel primitiva n -èsima de la unitat*.

PL18.—

- Trobeu les arrels primitives sisenes de la unitat.
- Sigui $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Demostreu que ζ^k és una arrel primitiva n -èsima de la unitat si i només si k i n son primers entre si.

(Suggeriment: Si recordeu la funció $\varphi(n)$ (l'indicador d'Euler), podem dir que el nombre total d'arrels primitives n -èsimes de la unitat és $\varphi(n)$.)

PL19.—Es defineix $\Phi_n(x)$ com el n -èsim polinomi ciclotòmic de la següent manera:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)})$$

on $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ són totes les arrels primitives n -èsimes de la unitat. Comproveu que

a) $\Phi_2(x) = x + 1$

b) $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$

c) $\Phi_4(x) = x^2 + 1$

d) $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

e) $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$

Conjectureu com serà $\Phi_p(x)$ si p és primer i demostreu la vostra conjectura.

Tots els polinomis ciclotòmics són irreductibles sobre els enters o els racionals, és a dir, no admeten descomposicions en factors de grau més petit amb coeficients racionals.

Problemes

PL20.—Demostreu que la mitjana geomètrica de dos nombres és sempre menor o igual que la seva mitjana aritmètica.

PL21.—(Olimpíada Austríaca). Trobeu tots els enters positius n pels quals l'equació de segon grau

$$a_{n+1}x^2 - 2x\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

té arrels reals per a qualssevol nombres reals $a_1, a_2, \dots, a_n$.

PL22.—(Olimpíada Russa, Leningrad). Siguin P_1, P_2 i P_3 polinomis de segon grau amb coeficient principal positiu i arrels reals. Demostreu que, si cada parell d'ells té una arrel comuna, llavors el polinomi $P_1 + P_2 + P_3$ té també arrels reals.

Polinomis

PL23.—(Mathematics Magazine). Demostreu que el polinomi $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$ no té arrels negatives.

PL24.—Si les arrels del polinomi $x^3 + ax^2 + bx + c$ estan

a) en progressió aritmètica, demostreu que $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

b) en progressió geomètrica, demostreu que $a^3c = b^3$.

PL25.—(Olimpíada Internacional). Demostreu que

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

PL26.—(Olimpíada Internacional). Siguin a i b nombres reals pels quals l'equació

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

té almenys una solució real. Per a tots aquests parells (a, b) , trobeu el mínim valor de $a^2 + b^2$.

PL27.—Calculeu la suma $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$.

PL28.—(XXIV Olimpíada Catalana). Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $xp(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre en té només una.

PL29.—Inscriuim un heptàgon regular en el cercle de radi unitat. Demostreu que la longitud del costat és una arrel del polinomi $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7$.

PL30.—El producte de dues de les quatre arrels de

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

és -32 . Determineu k .

PL31.—Demostreu que tot polinomi té un múltiple polinomial no zero (és a dir el polinomi multiplicat per un altre polinomi), els exponents del qual són tots divisibles per 1000000.

PL32.—Demostreu que

$$\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \cdots + n \binom{n}{n} = n 2^{n-1}.$$

PL33.—Demostreu que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

PL34.—(XXIII Olimpíada Espanyola.) Demostreu que per a tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + 3 \cdot \sqrt{\binom{n}{3}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} \leq \sqrt{2^{n-1} n^3}.$$

Mostra de solucions

Solució del problema PL2

Un polinomi de quart grau $Q(x)$, sempre admet una representació de la forma $Q(x) \equiv (p(x))^2 + q(x)$ amb $q(x)$ de primer grau. Només cal escriure $p(x) = ax^2 + bx + c$ i determinar a, b, c per minimitzar el grau de $Q(x) - (p(x))^2$. També ho podeu fer completant quadrats.

Sigui, doncs, $Q(x) = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39)$. És clar que per eliminar els monomis de quart i de tercer grau de $Q(x) - (p(x))^2$ haurà de ser $a = 1$ i $b = -11$. Si escrivim $p(x) = x^2 - 11x + c$, per tal de determinar c fem

$$Q(x) - (p(x))^2 = (-2c - 78)x^2 + (22c + 858)x - c^2 + t^2 + 10452(t + 39)$$

de manera que $-2c - 78 = 0$ equival a $c = -39$ (quina casualitat!!). El coeficient de primer grau, passa a valer, aleshores, $22(-39) + 858 = 0$ (una altra casualitat, segurament). Resumint,

$$Q(x) = (x^2 - 11x - 39)^2 + t^2 + 10452(t + 39) - 39^2.$$

El terme independent es pot escriure $t^2 - 39^2 + 10452(t + 39) = (t + 39)(t - 39) + 10452(t + 39)$ i per tant, $(t + 39)(t + 10452 - 39)$. Fent el canvi de variable

$$t = s - \frac{10452 - 39 + 39}{2} = s - \frac{10452}{2} = s - 5226,$$

agafa la forma $(s - 5187)(s + 5187) = s^2 - 5187^2$. El problema inicial es pot reformular demanant que per cada valor del paràmetre enter s es trobin solucions enteres x, y de l'equació

$$y^2 = (x^2 - 11x - 39)^2 + s^2 - 5187^2$$

que és equivalent a l'equació

$$y^2 - s^2 = (x^2 - 11x - 39)^2 - 5187^2.$$

En arribar aquest punt, val a dir que l'enunciat del problema sinó ambigu, com a mínim, és confús. Si no es llegeix amb atenció, hom pot pensar que es demanen totes les solucions i, aleshores, el problema no es raonable, tal com veurem més endavant.

Un cop convençuts que allò que es demana és trobar algunes solucions enteres x, y per a cada valor del paràmetre s (o $t = s - 5226$) es pot procedir de la següent manera. Fent $y = \pm s$, x, y seran solucions si $(x^2 - 11x - 39)^2 = 5187^2$ i, resulta (de nou, casualment) que l'equació $x^2 - 11x - 39 = 5187$ equivalent a $x^2 - 11x - 5226$ té les solucions $x_1 = -67, x_1 = 78$ de manera que per a cada t enter, $x = -67, y = \pm(t - 5226)$ i $x = 78, y = \pm(t - 5226)$ són quatre solucions del tipus que es demanen.

Des d'un punt de vista estricte, per donar el problema per acabat cal, encara, explicar perquè es raonable suposar que el problema no pot demanar altra cosa. Per a cada valor enter de x , $n(x) = (x^2 - 11x - 39)^2 - 5187^2$ és un enter que admet una expressió en

diferència de quadrats. Resoldre $y^2 - s^2 = n(x)$ equival a trobar totes les descomposicions de $n(x)$ en diferència de quadrats. Aquest és un problema que depèn de la descomposició de n en factors primers. De fet és fàcil provar i ho deixem com exercici pel lector, que a cada descomposició d'un enter m en producte de dos factors, $m = ab$ de la mateixa paritat, li correspon una representació com a diferència de quadrats. Per exemple, un nombre relativament petit com $4725 = 2^3 5^2 7$ admet 12 representacions, essencialment diferents, en diferència de dos quadrats.

Per últim direm, que si hem dedicat tant d'espai en aquest problema no es pas perquè el considerem especialment enriquidor, ans al contrari, perquè ningú no dediqui a la seva solució, mes temps d'aquell que és convenient.

Solució del problema PL8

L'expressió $a^4 + b^4 + c^4$ és una funció simètrica de les arrels; per tant es pot expressar com a funció dels coeficients. Si a és arrel del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$ s'ha de complir que $a^3 - 2a^2 + a + 5 = 0$. Així, si dividim a^4 entre $a^3 - 2a^2 + a + 5$ tindrem

$$a^4 = (a + 2)(a^3 - 2a^2 + a + 5) + 3a^2 - 7a - 10 = 3a^2 - 7a - 10.$$

Igualment

$$b^4 = 3b^2 - 7b - 10 \quad \text{i} \quad c^4 = 3c^2 - 7c - 10.$$

O sigui que

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= 3a^2 - 7a - 10 + 3b^2 - 7b - 10 + 3c^2 - 7c - 10 = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 7(a + b + c) - 30. \end{aligned}$$

Ara,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

i, per les relacions de Cardano,

$$a + b + c = 2, \quad ab + ac + bc = 1$$

i tenim

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3 \cdot (2^2 - 2 \cdot 1) - 7 \cdot 2 - 30 = -38.$$

Solució del problema PL26

Tenim una equació recíproca de 4rt grau. Dividint per x^2 i fent el canvi $y = x + 1/x$ resulta $x^2 - yx + 1 = 0$. Per tal que x sigui real ha de complir $y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \geq 2$. Després del canvi ens trobem amb $y^2 + ay + b - 2 = 0$ que proporciona

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}.$$

Però $|y| \geq 2 \Rightarrow |a| + \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geq 4$. D'aquí traiem $8|a| \geq 8 + 4b$. Simplificant, elevant al quadrat i sumant $4b^2$ als dos costats obtenim $4a^2 + 4b^2 \geq 5b^2 + 4b + 4$ d'on

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{4}\left(b^2 + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}.$$

El mínim del segon membre es dona quan $b = -2/5$ i val exactament $4/5$.

Solució del problema PL27

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} &= \frac{d}{dx}(x + x^2 + \dots + x^n) = \\ &= \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Substituint x per 2, obtenim la suma desitjada: $2^n(n-1) + 1$.

Solució del problema PL29

El costat de l'heptàgon és $2 \sin \pi/7$. Aplicant la fórmula de De Moivre:

$$\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^7 = \cos \pi + i \sin \pi$$

Igualant parts imaginàries, tenim:

$$-64 \sin^7 \frac{\pi}{7} + 112 \sin^5 \frac{\pi}{7} - 56 \sin^3 \frac{\pi}{7} + 7 \sin \frac{\pi}{7} = 0.$$

Ara només cal substituir $\sin \frac{\pi}{7}$ per $l/2$.

SUCCESSIONS RECURRENTS

Josep M. Brunat i Blay

Definicions i exemples

Les solucions d'una equació no sempre són nombres. Per exemple, si a l'equació $f'(x) = x$ la incògnita és f , les solucions són les funcions del tipus $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$. En les equacions recurrents les incògnites són *successions*. Una equació recurrent o recurrència és una equació

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}),$$

on f és una funció. El nombre k és l'ordre de la recurrència.

En són exemples les recurrències

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2}, & a_n &= n^2 + a_{n-1} \\ a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \dots + na_1, & a_n &= na_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}, \end{aligned}$$

que tenen, respectivament, ordre 2, 1, $n-1$ i 3.

Una *solució particular* és una successió $a_n = g(n)$ que compleix l'equació i la *solució general* és el conjunt de totes les successions que la satisfan.

Sovint interessa trobar l'única solució que té certs *valors o condicions inicials* $a_1 = c_1, a_2 = c_2, \dots, a_k = c_k$. (De vegades es comença a comptar la successió per 0 i els valors inicials són $a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{k-1} = c_{k-1}$).

Per exemple, l'equació d'ordre 2,

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$$

té per solució general $a_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$, una solució particular és $a_n = 2^n + 3^n$ i la solució que té condicions inicials $a_1 = 14$ i $a_2 = 40$ és $a_n = 2^n + 4 \cdot 3^n$.

Successions recurrents

Una successió *doble* és una successió que té dos índexs variant a $\mathbb{N}$. Per exemple, la successió

$$b_{n,k} = \binom{n}{k}$$

depèn dels dos índexs naturals n i k . El concepte de recurrència es pot definir igualment:

$$a_{n,k} = f(n, k, a_{n-1,k}, a_{n,k-1}, \dots).$$

Per exemple, si $b_{n,k} = \binom{n}{k}$, es té la coneguda relació

$$b_{n,r} = b_{n-1,r-1} + b_{n-1,r} \quad \text{o bé} \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

Les condicions inicials són ara una o més successions. En l'exemple dels nombres combinatoris, són $b_{n,0} = 1$ per tot $n \in \mathbb{N}$, i $b_{0,r} = 1$ per tot $r \in \mathbb{N}$.

Es poden considerar també les *inequacions recurrents* $a_n \leq f(n, a_{n-1}, \dots)$. En aquest cas l'objectiu que es pretén és una fita del tipus $a_n \leq g(n)$.

Alguns mètodes de solució

Mètode d'inducció

Consisteix a conjeturar una solució i després provar per inducció que efectivament ho és.

Exemple: Una carpeta conté n fulls i en busquem un examinant-los consecutivament a partir del primer. Quina és la mitjana del nombre de fulls examinats?

Si e_i és aquesta mitjana per a i fulls, és evident que $e_1 = 1$. Si hi ha n fulls, el que busquem, o bé està entre els $n-1$ primers (i això té probabilitat $\frac{n-1}{n}$), o bé és l'últim (amb probabilitat $\frac{1}{n}$). Per tant tenim,

$$e_n = \frac{n-1}{n} e_{n-1} + n \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} e_{n-1} + 1, \quad e_1 = 1.$$

Els primers termes són

$$e_1 = 2/2, \quad e_2 = 3/2, \quad e_3 = 4/2, \dots$$

i això ens suggereix que pot ser $e_n = \frac{n+1}{2}$. La demostració es fa després per inducció.

Mètode d'expansió (o d'iteració)

Consisteix a aplicar repetidament la recurrència fins a eliminar els termes de la successió.

Exemple: Una progressió aritmètico-geomètrica és aquella en què cada terme s'obté del precedent multiplicant-lo per una raó r i sumant després al resultat una diferència d . Trobeu el valor del terme enèsim a_n en funció de la raó, la diferència i a_1 i comproveu que la fórmula s'ajusta al cas de les progressions aritmètiques i al de les geomètriques. Si la raó és r i la diferència d , tenim la recurrència $a_n = ra_{n-1} + d$. Iterant,

$$\begin{aligned} a_n &= ra_{n-1} + d = r(ra_{n-2} + d) + d = r^2a_{n-2} + (1+r)d \\ &= r^2(ra_{n-3} + d) + (1+r)d = r^3a_{n-3} + (1+r+r^2)d = \dots \\ &= r^{n-1}a_1 + (1+r+\dots+r^{n-2})d \\ &= \begin{cases} r^{n-1}a_1 + \frac{1-r^{n-1}}{1-r}d & \text{si } r \neq 1 \\ a_1 + (n-1)d & \text{si } r = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Per $r = 1$ tenim la fórmula del terme general d'una progressió aritmètica i, per $d = 0$, d'una geomètrica.

Recurrències lineals

Una recurrència lineal d'ordre p té la forma

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_pa_{n-p} + f(n),$$

on els c_i són coeficients donats i els valors inicials són $a_1, \dots, a_p$. El terme independent és $f(n)$. Si és nul, diem que l'equació és *homogènia*.

Cas homogeni

Per trobar la solució general de la recurrència $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_pa_{n-p}$, podem començar per veure si $a_n = \alpha^n$ és solució per algun valor de α . Substituint i simplificant tenim $\alpha^n - c_1\alpha^{n-1} - \dots - c_p\alpha^{n-p} = 0$ o també $\alpha^p - c_1\alpha^{p-1} - \dots - c_p = 0$, d'on resulta que α ha de ser una arrel de l'equació $x^p - c_1x^{p-1} - \dots - c_p = 0$. Aquesta equació s'anomena *equació característica* de la recurrència lineal i permet de resoldre completament la recurrència. En efecte, es pot demostrar:

• La solució general d'una recurrència lineal homogènia té una expressió que és una suma de tants sumands com arrels diferents té l'equació característica. El sumand corresponent a una arrel α de multiplicitat k és

$$(\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \cdots + \lambda_k n^{k-1})\alpha^n.$$

Imposant els valors inicials es calculen els valors dels λ_i .

Exemple: Considerem la recurrència $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. L'equació característica és $x^2 - 5x + 6 = 0$, que té dues arrels diferents 2 i 3. Per tant, la solució general és $a_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. Si els valors inicials són $a_1 = 14$ i $a_2 = 40$, plantegem el sistema $14 = \lambda 2 + \mu 3$, $40 = \lambda 4 + \mu 9$ que té solució $\lambda = 1$ i $\mu = 4$. La successió cercada és $a_n = 2^n + 4 \cdot 3^n$.

Exemple: L'equació recurrent $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ té equació característica $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ o bé $(x - 2)^3 = 0$. Hi ha l'arrel triple 2. Per tant, la solució general és $a_n = (\lambda + \mu n + \nu n^2) 2^n$.

Exemple: L'equació recurrent $a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}$ té equació característica $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ o bé $(x + 3)(x - 2)^2 = 0$ que té l'arrel simple -3 i l'arrel doble 2. L'arrel simple contribueix a la solució general amb $\lambda(-3)^n$ i l'arrel doble amb $(\mu + \nu n) 2^n$, i la solució general és $a_n = \lambda(-3)^n + (\mu + \nu n) 2^n$.

Exemple: L'equació recurrent $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ té equació característica $x^2 - 2x + 2 = 0$ que té les dues arrels diferents complexes conjugades $\alpha_1 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ i $\alpha_2 = 1 - i = \sqrt{2}(\cos \pi/4 - i \sin \pi/4)$. La solució general serà $a_n = \lambda \alpha_1^n + \mu \alpha_2^n$. Però si volem expressar-la en termes reals, hem d'observar que λ i μ han de ser conjugats i per tant de la forma $\lambda = A + Bi$, $\mu = A - Bi$. Substituint a la solució general, i tenint present que $(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)^n = \cos n\pi/4 + i \sin n\pi/4$, resulta $a_n = (\sqrt{2})^n (2A \cos n\pi/4 - 2B \sin n\pi/4)$ que és la solució general real.

Cas no homogeni

L'equació homogènia associada a una recurrència lineal

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p} + f(n)$$

és l'equació

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p}.$$

Per tal de resoldre-la, cal tenir present que

• La solució general d'una recurrència no homogènia s'obté sumant a una de les seves solucions particulars la solució general de l'homogènia.

Per tant, el problema queda reduït a trobar una solució particular de l'equació no homogènia. Aquestes solucions particulars s'endevinen astutament. Freqüentment, un bon camí és el següent.

- Calcular el polinomi característic $p(x)$ de l'equació homogènia associada.
- Buscar una recurrència homogènia que admeti la solució particular $f(n)$; diguem $q(x)$ al seu polinomi característic.
- Escriure la solució general de la recurrència homogènia associada a $p(x)q(x)$.
- De la solució general obtinguda a c), suprimir els sumands que corresponen a $p(x)$.
- El resultat obtingut és un bon candidat a solució particular de l'equació no homogènia.

Exemple: Equació no homogènia: $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n - 1$. L'homogènia associada és $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$ i $p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. De l'expressió $2^n - 1 = 2^n - 1 \cdot 1^n$ deduïm que $q(x) = (x-2)(x-1)$, de forma que $p(x)q(x) = (x+3)(x-2)^2(x-1)$. Això dóna la solució $b_n = \alpha(-3)^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n + \delta 1^n$. Suprimint la part corresponent a $p(x)$ queda com a candidat que cal assajar $c_n = \gamma n 2^n + \delta$. Substituint a l'equació original dóna $\gamma = 2/5$ i $\delta = 1/4$. Una solució particular és, doncs, $c_n = \frac{2}{5}n 2^n + \frac{1}{4}$. La solució general de l'homogènia és $h_n = \lambda_1 3^n + \lambda_2 (-2)^n$. Per tant, la solució general cercada és

$$a_n = \frac{2}{5}n 2^n + \frac{1}{4} + \lambda_1 3^n + \lambda_2 (-2)^n.$$

Exemple: Trobar una fórmula tancada $s_n = g(n)$ per

$$s_n = \sum_{k=1}^n k^2.$$

És evident que $s_n = s_{n-1} + n^2$ i $s_1 = 1$. Tenim, doncs, una equació lineal de terme independent n^2 . L'homogènia associada és $s_n = s_{n-1}$ que dóna lloc a $p(x) = x - 1$. Com que $n^2 = n^2 \cdot 1^n$ resulta que $q(x) = (x-1)^3$ i $p(x)q(x) = (x-1)^4$ que genera les solucions $b_n = \delta 1^n + \gamma n 1^n + \beta n^2 1^n + \alpha n^3 1^n$. Suprimint la part que correspon a $p(x)$ queda $\gamma n + \beta n^2 + \alpha n^3$ i substituint a l'equació original queda $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/2$ i $\gamma = 1/6$ d'on la solució general és $s_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + c 1^n$. Imposant $s_1 = 1$ resulta $c = 0$ i obtenim la coneguda fórmula

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Remarca

En un producte de n factors, de quantes maneres a_n es poden posar parèntesis agrupant tots els factors? Evidentment, $a_1 = a_2 = 1$. Per $n = 3$, hi ha dues formes que corresponen a les dues maneres de calcular el producte, $(x_1(x_2x_3))$ i $((x_1x_2)x_3)$. Podeu comprovar que $a_4 = 5$ i amb una mica de reflexió, arribar a la recurrència

$$a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1,$$

per a la qual no serveixen les tècniques anteriors perquè no és lineal. La tècnica de les funcions generadores (vegeu les referències) és un altre mètode per resoldre recurrències. Per exemple, permet obtenir la solució

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

per a la recurrència anterior.

D'altra banda, en molts casos s'està més interessat en poder calcular els termes d'una successió a_n que en una fórmula del tipus $a_n = g(n)$. Llavors n'hi ha prou amb conèixer els valors inicials i establir la recurrència.

Problemes

SR1.—En cada cas, escriviu els sis primers termes de la successió que compleix la recurrència donada, formuleu una solució hipotètica i proveu-la per inducció:

a) $x_1 = 2, \quad x_n = x_{n-1} + 2n.$

b) $u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}.$

SR2.—Considereu la recurrència amb dos índexs

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{n,k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ o } k > n, \quad a_{n,k} = \frac{1}{2}(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}) \text{ altrament.}$$

Calculeu uns quants $a_{n,k}$, conjectureu una fórmula, i proveu-la per inducció.

SR3.—Resoleu per iteració la recurrència $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta^n$.

SR4.—Quantes multiplicacions o divisions cal fer, en el pitjor dels casos, per a triangular una matriu $n \times n$?

SR5.—S'estima que la facturació d'una empresa és cada any la mitjana entre la de l'any anterior i la de l'any següent. Si les vendes el 1990 són v_0 i el 1991 són v_1 , es demanen les vendes de l'any $1990 + n$.

SR6.—El joc de les torres de Hanoi consta de tres pals verticals A, B i C i de n discs de radis diferents que, al principi, són apilats de gran (sota) a petit (dalt), travessats pel pal A. L'objectiu és col·locar la pila en idèntica posició però al pal B. L'única jugada permesa és passar el disc més alt d'una pila a la posició superior d'una altra pila, sense cobrir, però, un disc més petit. Trobeu una relació recurrent per al nombre mínim de jugades necessàries per completar el joc i resolcu-la.

SR7.—Segons es diu, el rei King Shirham de l'Índia volgué recompensar el seu Gran Visir SissaBen Dahir per inventar el joc dels escacs i li demanà quin premi volia. El Visir contestà: “dona'm un gra de blat pel primer quadrat, dos pel segon, quatre pel tercer, vuit pel quart, etc. fins acabar amb tots els quadrats del tauler”. Cas de satisfer la demanda, quants grans de blat li hauria donat el rei al visir?.

SR8.—En el pla hi ha dos punts pintats de groc i r punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments que tenen per extrems punts de diferents colors.

a) Proveu que el nombre mínim de segments que cal dibuixar per tal que tots els punts quedin connectats és $r + 1$.

b) De quantes maneres diferents es poden dibuixar $r + 1$ segments de forma que tots els punts quedin connectats?

SR9.—De quantes maneres es pot enrajolar un passadís rectangular de mides $2 \times n$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i 2×2 i no es poden trencar rajoles?

SR10.—D'una parella de conills neix, a la fi de cada mes, una altra parella. Aquesta farà néixer una altra parella a la fi de cada mes (a partir del segon mes), i així successivament. Si no hi ha defuncions, quantes parelles tindrem n mesos després? (*Problema de Fibonacci*).

SR11.—Un sistema permet d'emetre tres senyals diferents, un dels quals dura un segon i, els altres, dos segons cadascun. Trobeu el nombre de seqüències de senyals diferents que es poden emetre en n segons suposant que no hi ha cap temps mort entre cada dos senyals.

SR12.—Tot resolent cert problema, es diu que una persona és al nivell n quan li falten n etapes per arribar a la solució. A cada nivell té 5 alternatives, dues que el porten al nivell $n - 1$ i tres que són millors, en el sentit de que el porten directament al nivell $n - 2$. Sigui a_n el nombre de maneres d'arribar a la solució des del nivell n . Trobeu a_n sabent que $a_1 = 2$.

SR13.—Trobeu el nombre de maneres diferents de pujar una escala de n graons si en cada pas en pugem un o dos.

SR14.—Considereu les paraules de longitud n amb símbols de l'alfabet $\{0, 1, 2\}$.

- a) Quantes paraules tenen els dígitos cadascun igual o superior a l'anterior?
- b) Quantes paraules són cap-i-cua?

SR15.—Trobeu el nombre de paraules de longitud k que es poden fer emprant l'alfabet $\{0, 1, 2, 3\}$ que tinguin un nombre parell de zeros.

SR16.—Considerem les successions ternàries de longitud n .

- a) Quantes n'hi ha que continguin dos símbols consecutius iguals?
- b) A quantes d'elles no hi ha ni dos uns consecutius ni dos dosos consecutius?

SR17.—Considerem n rectes al pla en posició general (dues a dues no paral·leles, tres a tres no concurrents).

- a) En quantes regions queda dividit el pla?
- b) Quantes d'aquestes regions són no fitades?

SR18.—Voleu pintar els costats d'un polígon regular de n vèrtexs de forma que costats contigus tinguin colors diferents. Disposeu d'una caixa de k colors. De quantes maneres ho podeu fer? (Indicació: Numereu els costats consecutivament, $1, 2, \dots, n$ i considereu separatament les coloracions en què 1 i 3 es pinten del mateix color i les que no).

SR19.—Sumeu l'expressió següent,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2).$$

SR20.—Sigui a un nombre real i n un enter positiu. Calculeu,

$$a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n.$$

SR21.—Sigui $\lambda(n, k)$, on $n \geq 1$, el nombre de k -subconjunts de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ que no contenen dos enters consecutius.

a) Demostreu que $\lambda(n, k) = \lambda(n-1, k) + \lambda(n-2, k-1)$ per tot $n \geq 3$.

b) Proveu que per tot $n \geq 1$ i $0 \leq k \leq n$,

$$\lambda(n, k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

c) Calculeu el nombre $\mu(n, k)$ de maneres d'escollir k persones d'entre n assegudes en una taula rodona sense agafar-ne dues de veïnes.

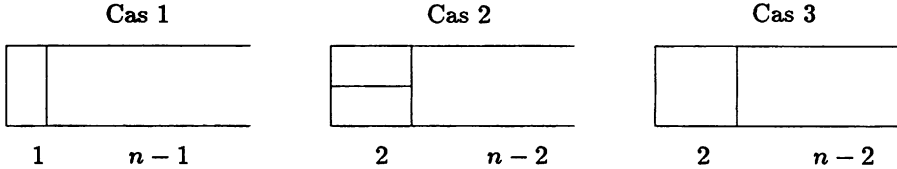
SR22.—Teniu n objectes situats cada un al seu lloc. Sigui d_n el nombre de formes de desar les coses de forma que no n'hi hagi cap al seu lloc. Calculeu d_1 , d_2 i d_3 i establiu una recurrència per d_n .

SR23.—Sigui t_n el nombre de formes de dividir en triangles un polígon regular de n costats mitjançant diagonals que no es tallin. Comproveu que $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 5$ i establiu una recurrència per t_n .

Mostra de solucions

Solució del problema SR9

Podem començar a enrajolar en una de les tres formes següents:



En el cas 1 queda per enrajolar un passadís $2 \times (n-1)$ que es pot fer de u_{n-1} maneres. En els casos 2 i 3 queda per enrajolar un passadís de $2 \times (n-2)$ que es pot fer de u_{n-2} maneres. Per tant

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$$

que té solució general $u_n = A2^n + B(-1)^n$.

Les condicions inicials són $u_1 = 1$ i $u_2 = 3$ i això ens dóna

$$u_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n.$$

Solució del problema SR14

a) Les paraules considerades són de la forma

$$\underbrace{00 \dots 0}_{x_0} \underbrace{11 \dots 1}_{x_1} \underbrace{22 \dots 2}_{x_2}$$

que es poden identificar amb successions

$$\underbrace{aa \dots a}_{x_0} s \underbrace{aa \dots a}_{x_1} s \underbrace{aa \dots a}_{x_2}$$

on a designa una lletra de l'alfabet i s designa el "canvi de lletra". El nombre d'aquestes successions és

$$\binom{n+2}{2}.$$

b) Sigui a_n el nombre de cap-i-cues de longitud n . Tot cap-i-cua té als extrems el mateix dígit (0, 1 o 2), i si els suprimim, obtenim un cap-i-cua de longitud $n-2$. Així, $a_n = 3a_{n-2}$. Com que $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, resulta

$$a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n + \frac{1-\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3})^n.$$

Observació: Una altra solució sense emprar recurrències dóna

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n/2} \quad \text{si } n \text{ és parell} \\ a_n &= 3^{(n+1)/2} \quad \text{si } n \text{ és senar} \end{aligned}$$

Una fórmula que agrupa els dos casos és

$$a_n = 3^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}.$$

Solució del problema SR20

Si $a = 0$, llavors $a_n = 0$ per tot n .

Si $a = 1$, llavors $a_n = 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$.

Primer mètode:

En tot el que segueix podem suposar $a \neq 0, 1$. Es demana la resolució de la recurrència

$$a_n = a_{n-1} + n a^n$$

amb valors inicials $a_1 = a$, $a_0 = 0$. La recurrència homogènia associada és $a_n = a_{n-1}$, de polinomi característic $p(x) = x - 1$, i que té solució $h_n = \alpha$. El polinomi característic d'una recurrència que admeti la solució particular $f(n) = n a^n$ és $q(x) = (x - a)^2$. La solució general de la recurrència homogènia associada a $p(x)q(x) = (x - 1)(x - a)^2$ és de la forma $\delta + (\beta n + \gamma)a^n$. Suprimint δ , que és la part que prové de $(x - 1)$, obtenim $p_n = (\beta n + \gamma)a^n$, com a candidat a solució particular. Imposem la recurrència:

$$(\beta n + \gamma)a^n = (\beta(n-1) + \gamma)a^{n-1} + n a^n.$$

Com que $a \neq 0$, resulta

$$(\beta n + \gamma)a = (\beta n - \beta + \gamma) + n a$$

o sigui

$$(\beta a - \beta - a)n + \gamma a + \beta - \gamma = 0.$$

que dóna lloc al sistema $\beta(a-1) - a = 0$, $\gamma(a-1) + \beta = 0$ que té solució $\beta = a/(a-1)$ i $\gamma = -a/(a-1)^2$. La solució buscada és, doncs, de la forma

$$a_n = \alpha + \left(\frac{a}{a-1}n - \frac{a}{(a-1)^2}a^n \right).$$

Successions recurrents

Per $n = 0$ resulta $\alpha = a/(a-1)^2$ i finalment queda

$$a_n = \frac{a}{(a-1)^2} + \left(\frac{a}{a-1}n - \frac{a}{(a-1)^2}a^n \right).$$

Segon mètode:

Tenim que

$$\begin{aligned} a_n &= a + 2a^2 + \cdots + na^n \\ a a_n &= a^2 + \cdots + (n-1)a^n + n a^{n+1}, \end{aligned}$$

i restant queda

$$(1-a)a_n = a + a^2 + \cdots + a^n - n a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - a}{a-1} - n a^{n+1}$$

i, com que $a \neq 1$, la solució és

$$a_n = \frac{1}{1-a} \left(\frac{a^{n+1} - a}{a-1} - n a^{n+1} \right).$$

DESIGUALTATS

Ignasi Mundet i Riera

Per començar, deixa'm proposar-te dos problemes...

- Suposem que tenim n nombres reals qualssevol $a_1, \dots, a_n$, de manera que la seva suma sigui 1. Demostra que la suma dels quadrats d'aquests nombres és més gran que $1/n$.
- Prenem novament n nombres reals, $a_1, \dots, a_n$, però ara exigim que siguin positius. Suposem que el seu producte és igual a 1. Demostra que llavors la seva suma és més gran que n .

Abans de continuar llegint, intenta resoldre'ls...

Te n'has cansat? Doncs deixa'm donar-te una pista. Mira de resoldre aquest problema: *Demostreu que per a tot nombre real x es té la desigualtat*

$$x^2 - 6x + 13 \geq 4.$$

Aquest és més fàcil, no? Va, vinga, pensa'l.

És probable que el primer que hakis fet sigui derivar. Molt bé; és una possibilitat. Ara, tot i que a tu et sembli molt natural, deixa'm dir-te (no t'ofenguis!), que això és un pel recargolat. En efecte, si escrivim

$$x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4,$$

i recordem que un nombre real elevat al quadrat sempre és més gran o igual que zero, el problema és obvi. Aquesta pista no és cap tonteria. Les derivades són un instrument potentíssim i molt astut, però n'hi ha d'altres més elementals i senzills que permeten resoldre els dos problemes del començament. En canvi, si vols fer-ho usant tècniques de càlcul infinitesimal, el més probable és que et faltin alguns coneixements (cosa molt normal). Per tant, intenta resoldre els dos problemes amb aquesta eina: tot nombre real elevat al quadrat és més gran o igual que zero. Au, a pensar!

Com que veig que tornes a llegir, t'explico algunes maneres de solucionar els dos problemes. És perfectament possible que tu ja els hakis resolt, però que hakis seguit un altre camí (ja me l'explicaràs). Espero que, en tot cas, les solucions que et dono et resultin interessants...

La desigualtat de Cauchy-Schwartz

Anem a resoldre el primer. Recordes la fórmula del producte escalar? Si tens dos vectors de l'espai, $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$, el seu producte escalar $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

és igual al producte dels mòduls de x i y pel cosinus de l'angle que determinen els dos vectors. Ara bé, com que per a qualsevol nombre α real el valor absolut de $\cos \alpha$ està entre 0 i 1, resulta que

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x \cdot y \leq \|x\| \cdot \|y\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}.$$

Elevant-ho tot al quadrat i comparant els termes dels extrems, obtenim:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Ens podem preguntar: si en lloc de prendre vectors en dimensió tres els agafem en una dimensió arbitrària, segueix essent certa aquesta desigualtat? La resposta és afirmativa. Escrivim-ho bé:

TEOREMA. *Siguin $x_1, \dots, x_n$ i $y_1, \dots, y_n$ nombres reals. Llavors es compleix*

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$

Aquesta desigualtat s'anomena **desigualtat de Cauchy-Schwartz**. Demostrem-la. Escrivim $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$. Si prenem qualsevol nombre real λ , es compleix

$$(x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = \|x - \lambda y\|^2 \geq 0.$$

Desenvolupem i obtenim

$$(x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = x \cdot x - 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 y \cdot y.$$

Fixa't ara en el terme de la dreta. Oi que és un polinomi en λ amb coeficients reals? A més, hem quedat que aquest polinomi sempre és positiu. Això, ja ho deus saber (i si no, mira de demostrar-ho), implica que el discriminant del polinomi és negatiu. Escrivim-ho:

$$0 \geq (2x \cdot y)^2 - 4(x \cdot x)(y \cdot y).$$

Desenvolupa el terme de la dreta, divideix per quatre, i obtindràs que

$$(x \cdot x)(y \cdot y) \geq (x \cdot y)^2,$$

que és el que volíem demostrar (escrit d'una altra manera). Doncs ara torna a pensar el primer problema, a veure si et surt.

Desigualtat MA-MG

Si tens n nombres reals, $x_1, \dots, x_n$, la seva mitjana aritmètica es defineix:

$$M_A(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Segur que això ja t'ho havien explicat (potser sols escriure la mitjana $\bar{x}$). Ara bé, no se t'ha acudit mai que es podria fer la mitjana d'una altra manera? Per exemple, en lloc de sumar els nombres i dividir per n , podríem multiplicar-los i calcular l'arrel n -èssima del resultat. Aquesta mitjana s'anomena mitjana geomètrica; l'escriurem:

$$M_G(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{1/n}$$

Quina relació hi ha entre les mitjanes M_A i M_G ? Per exemple, quina és la més gran? Està clar que si els nombres $x_1, \dots, x_n$ poden ser tant negatius com positius, a vegades $M_A > M_G$ i a vegades $M_A < M_G$ (per què?). Per tant, a partir d'ara considerarem mitjanes de nombres positius. Què es pot dir aleshores? Mirem què passa amb dos nombres positius a i b . Llavors $M_A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ i $M_G(a, b) = \sqrt{ab}$. Quina és més gran? Va, a veure si ho endevines!

Sí, és clar: sempre es compleix $M_A(a, b) \geq M_G(a, b)$. Per demostrar-ho podem fer servir el truc de sempre:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Desenvolupo i em surt:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

i per tant:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Ja està. Ah, per cert! En quins casos és $M_A(a, b) = M_G(a, b)$? (Això t'ho deixo a tu perquè ho pensis.)

I què passa si en lloc de considerar mitjanes de dos nombres, les agafem de tres nombres? O de qualsevol quantitat de nombres? Doncs resulta que la desigualtat $M_A \geq M_G$ sempre es compleix. Això se sol anomenar **la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica** (o, més curt: **desigualtat MA-MG**):

TEOREMA. *Siguin $x_1, \dots, x_n$ nombres reals positius. Llavors es compleix:*

$$M_A(x_1, \dots, x_n) \geq M_G(x_1, \dots, x_n),$$

i només hi ha igualtat quan $x_1 = \dots = x_n$.

Desigualtats

T'explico una demostració (molt bonica) que en va donar un matemàtic hongarès que es diu G.Pólya. Primer de tot, demostra (si no la saps), aquesta desigualtat: per a tot x real, $e^{x-1} \geq x$. (En quins casos hi ha igualtat?).

Diguem $M_A(x_1, \dots, x_n) = a$ i escrivim:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x_1}{a}-1} &\geq \frac{x_1}{a} \\ e^{\frac{x_2}{a}-1} &\geq \frac{x_2}{a} \\ &\dots \\ e^{\frac{x_n}{a}-1} &\geq \frac{x_n}{a} \end{aligned}$$

Multiplico tots els termes de la dreta i tots els de l'esquerra i obtinc:

$$e^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{a} - n} \geq \frac{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}{a^n}.$$

I si ara uso que $M_A(x_1, \dots, x_n) = a$ a l'esquerra em queda un $e^0 = 1$ i per tant:

$$1 \geq \frac{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}{a^n}$$

(això és el que volíem demostrar, no?). Queda per veure que només hi ha igualtat quan tots els x_i són iguals (va, fes-ho tu).

..i ara sí que pots solucionar el segon problema.

Altres mitjanes

T'explicaré una altra manera de demostrar la desigualtat anterior. És menys enginyosa, però es pot usar per demostrar moltes altres desigualtats entre mitjanes. Observa aquestes propietats trivials de la mitjana aritmètica:

1. $M_A(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = M_A(M_A(x_1, \dots, x_n), M_A(x_{n+1}, \dots, x_{2n}))$.
2. Si $x_1 \geq y_1, \dots, x_n \geq y_n$, llavors $M_A(x_1, \dots, x_n) \geq M_A(y_1, \dots, y_n)$.
3. Si $y < M_A(x_1, \dots, x_n)$, llavors $y < M_A(y, x_1, \dots, x_n) < M_A(x_1, \dots, x_n)$.
4. Si $y > M_A(x_1, \dots, x_n)$, llavors $y > M_A(y, x_1, \dots, x_n) > M_A(x_1, \dots, x_n)$.

Comprova que la mitjana geomètrica també ho compleix (de fet, és ben raonable que una mitjana tingui aquestes propietats, no?). Ara siguin $x_1, \dots, x_n$ nombres positius. Per demostrar la desigualtat $M_A(x_1, \dots, x_n) \geq M_G(x_1, \dots, x_n)$, usarem inducció sobre n . El cas $n = 2$ és fàcil, i l'hem vist al començament de la secció anterior. Suposem doncs que

$n > 2$ i que el teorema és cert per a tot enter k , $2 \leq k < n$. Si n és parell, $n = 2m$, uso la hipòtesi inductiva:

$$\begin{aligned} M_A(x_1, \dots, x_m) &\geq M_G(x_1, \dots, x_m), \\ M_A(x_{m+1}, \dots, x_{2m}) &\geq M_G(x_{m+1}, \dots, x_{2m}), \end{aligned}$$

i les propietats anteriors:

$$\begin{aligned} M_A(x_1, \dots, x_{2m}) &= M_A(M_A(x_1, \dots, x_m), M_A(x_{m+1}, \dots, x_{2m})) \geq \\ &\geq M_A(M_G(x_1, \dots, x_m), M_G(x_{m+1}, \dots, x_{2m})) \geq \\ &\geq M_G(M_G(x_1, \dots, x_m), M_G(x_{m+1}, \dots, x_{2m})) = \\ &= M_G(x_1, \dots, x_{2m}) \end{aligned}$$

Ara suposem que n sigui senar, $n = 2m + 1$. Vegem que aquí també funciona la cosa. Suposem el contrari, i arribarem a un absurd. Sigui doncs

$$a = M_A(x_1, \dots, x_n) < M_G(x_1, \dots, x_n) = b$$

Aleshores prenc un y tal que $a < y < b$. Per les propietats de les mitjanes,

$$a < M_A(y, x_1, \dots, x_n) < y < M_G(y, x_1, \dots, x_n) < b.$$

És a dir, que

$$M_A(y, x_1, \dots, x_n) \leq M_G(y, x_1, \dots, x_n).$$

Però $y, x_1, \dots, x_n$ són $n + 1 = 2m + 2$ nombres. Ara, per hipòtesi inductiva, el teorema és cert per $m + 1$ nombres (comprova que $m + 1 < n$). Però hem vist abans que si el teorema és cert per $m + 1$, llavors també ho és per $2m + 2$. Per tant ha de ser

$$M_A(y, x_1, \dots, x_n) \geq M_G(y, x_1, \dots, x_n).$$

Contradicció! (i, per tant, ja hem acabat).

Vegem com aquesta tècnica es pot usar per provar altres desigualtats. Fixa't que per veure que en general $M_A \geq M_G$, només he usat que tant M_A com M_G compleixen les propietats (1) a (4) i que si prenem dos nombres, aleshores la desigualtat és certa (aquest últim fet és fàcil de demostrar).

Definim ara la mitjana harmònica dels nombres positius diferents de zero $x_1, \dots, x_n$:

$$M_H(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \right)$$

Desigualtats

Ara, per veure que sempre $M_H \leq M_A$, només cal comprovar-ho considerant les mitjanes de dos nombres, i després verificar que la mitjana M_H també compleix les propietats (1) a (4) (fes-ho!).

En general, si $x_1, \dots, x_n$ són nombres positius diferents de zero i $\alpha \neq 0$ és un nombre real, es defineix:

$$M_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha}$$

Observa que la mitjana aritmètica és M_1 i l'armònica M_{-1} . Definim també

$$M_0(x_1, \dots, x_n) = M_G(x_1, \dots, x_n).$$

Aleshores es pot demostrar aquest

TEOREMA. *Siguin α i β dos nombres reals qualssevol, i suposem que $\alpha < \beta$. Llavors*

$$M_\alpha(x_1, \dots, x_n) \leq M_\beta(x_1, \dots, x_n),$$

amb igualtat només quan tots els x_i són iguals. Et veus amb cor de demostrar-lo? Pensa una estona i veuràs que amb tot el que t'he explicat és força fàcil.

... i altres desigualtats

Desigualtat de Young

Sigui $y = \phi(x)$ una funció que per $x \geq 0$ és contínua, estrictament creixent (és a dir, si $x_1 > x_2 \geq 0$ llavors $\phi(x_1) > \phi(x_2)$) i tal que $\phi(0) = 0$, i $\phi(x) \rightarrow \infty$ quan $x \rightarrow \infty$. Llavors existeix la funció inversa de ϕ , que escriurem ψ . Es compleix per a tot x positiu que $\psi(\phi(x)) = x$. Aleshores, si a i b són nombres positius, la **desigualtat de Young** diu que

$$ab \leq \int_0^a \phi(x) dx + \int_0^b \psi(x) dx.$$

Per demostrar-la, dibuixa el gràfic de ϕ i veuràs que el resultat és absolutament obvi (pots considerar per separat els casos $b > \phi(a)$, $b = \phi(a)$ i $b < \phi(a)$).

Desigualtat de Hölder

Considera la desigualtat de Young amb la funció $\phi(x) = x^{p-1}$. Joga una mica i obtindràs la **desigualtat de Hölder**: Si p i q són positius tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, aleshores

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualtat de Jensen

Sigui ϕ una funció definida per a tot nombre real que sigui convexa. Llavors, si $x_1, \dots, x_n$ són nombres reals qualssevol, es compleix

$$\phi\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \phi(x_i)}{n}.$$

Més en general, si f és una funció real definida a l'interval $[0, 1]$, llavors

$$\int_0^1 \phi(f(s)) ds \geq \phi\left(\int_0^1 f(s) ds\right).$$

Desigualtat de Bernouilli

Sigui $x \geq -1$ i $0 < \alpha < 1$. Llavors

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

En canvi, si $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, llavors es compleix

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Només hi ha igualtat (en els dos casos) quan $x = 0$. (Aquesta és fàcil de demostrar.)

Problemes

Per acabar, uns quants problemes. Alguns es resolen amb el que hem vist fins ara; d'altres amb una mica d'imaginació i prou; i d'altres, amb les dues coses.

Problemes senzills

DE1.—Sigui $n > 1$ un nombre natural. Demostra que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

DE2.—Demostra que si $x + y + z = 6$ llavors $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Desigualtats

DE3.—Quin dels dos nombres és més gran:

$$(19941994!)^2 \text{ ó } 19941994^{19941994}.$$

DE4.—Demostreu que per a qualsevol x real es compleix

$$e^x \leq x + e^{x^2}.$$

DE5.—Quina és la mínima longitud possible de la diagonal més gran d'un trapezi d'àrea 1?

DE6.—Demostreu que donats nombres reals T_j ($j = 1, 2, \dots, n$) arbitraris, es compleix la desigualtat

$$\sum_{j,k=1}^n \cos(T_k - T_j) \geq 0.$$

DE7.—A l'interior d'un quadrat de costat 1 hi ha nou punts. Demostreu que existeix un triangle amb l'àrea més petita que $1/8$ i tal que els seus vèrtexs són tres dels nou punts donats.

DE8.—Suposem que n és un nombre natural, i que els nombres a_i (on $1 \leq i \leq n$) i p són reals i positius. Demostreu la desigualtat:

$$n \cdot \sum_{i=1}^n a_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^{p+1} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^{-1} \right).$$

DE9.—Sabem dels nombres $a_1, \dots, a_n$, que per a qualsevol k es compleix la desigualtat $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} \geq 0$ i a més a més que $a_1 = a_n = 0$. Demostreu que aleshores tots els a_j són no positius.

DE10.—Existeix alguna funció injectiva $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que compleixi per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$ la desigualtat $f(x^2) - (f(x))^2 \geq 1/4$?

DE11.—Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

*Problemes no tan senzills***DE12.**—Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

DE13.—Demostra la desigualtat

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}.$$

DE14.—Demostra que per a qualssevol nombres positius $x_1, \dots, x_n$ es té la desigualtat

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{n}{4}.$$

DE15.—Sigui A un conjunt de S punts a l'espai de tres dimensions. Siguin S_x , S_y i S_z les quantitats de punts que surten a les projeccions ortogonals de A sobre els plans $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ respectivament. Demostra que

$$S^2 \leq S_x S_y S_z.$$

DE16.—Sigui f una funció no negativa, contínua i còncaua a l'interval $[0, 1]$ i tal que $f(0) = 1$. Llavors

$$\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

Mostra de solucions**Solució del problema DE2**

Aplicant la desigualtat Cauchy-Schwartz als vectors $u = (1, 1, 1)$ i $v = (x, y, z)$, surt

$$((1, 1, 1) \cdot (x, y, z))^2 = (u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

Desigualtats

o bé, $36 = (x + y + x)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, i d'aquí es dedueix, dividint per 3, el resultat. La desigualtat no es pot millorar, ja que el vector $(2, 2, 2)$ fa que sigui $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Solució del problema DE6

Sigui el nombre complex

$$A = \sum_1^n e^{iT_j} = \sum_1^n (\cos T_j + i \sin T_j).$$

El seu conjugat és $\bar{A} = \sum_1^n e^{-iT_j} = \sum_i^n (\cos T_j - i \sin T_j)$, i el producte $A\bar{A}$, que és un nombre real més gran o igual que zero, és

$$0 \leq A\bar{A} = \sum_{j,k} e^{i(T_j - T_k)} = \sum_{j,k} \cos(T_j - T_k).$$

Observeu que la part imaginària de $A\bar{A}$, que és $\sum_{j,k} \sin(T_j - T_k)$, és nul·la, tan per la deducció anterior, com per la observació directa dels termes $\sin(T_r - T_s)$ i $\sin(T_s - T_r)$ iguals i de signe contrari.

Solució del problema DE11

Observem que

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \dots, \quad \frac{k-1}{k} < \frac{k}{k+1} < 1.$$

Això ens permet escriure

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \dots \left(\frac{98}{99}\right)^2 \left(\frac{99}{100}\right)^2 < \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{4}{5} \dots \frac{97}{98} \frac{98}{99} \frac{99}{100} \frac{100}{100} = \frac{1}{100}$$

i, fent l'arrel quadrada, surt el resultat

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Solució del problema DE15

Considerem la família $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ de plans paral·lels a $z = 0$ que contenen punts del conjunt donat: es fa passar per cada punt del conjunt inicial un pla paral·lel a $z = 0$, i es treuen els plans repetits. Cada un dels plan π_i conté un o més punts del conjunt inicial. Sigui a_i el nombre de punts que són al pla π_i . Designem per x_i , (resp. y_i) el nombre de projeccions sobre $x = 0$ (resp. $y = 0$) dels punts del conjunt que són a π_i . Es compleix

$$S_x = \sum_1^k x_i, \quad S_y = \sum_1^k y_i, \quad a_i \leq x_i y_i, \quad a_i \leq S_x, \quad S = \sum_1^k a_i.$$

Calculant surt

$$\begin{aligned}
 S^2 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 = \left(\left(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_k} \right) \cdot \left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{a_k}{\sqrt{x_k}} \right) \right)^2 \leq \\
 &\leq \left\| \left(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_k} \right) \right\|^2 \left\| \left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{a_k}{\sqrt{x_k}} \right) \right\|^2 = (x_1 + \cdots + x_k) \left(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_k^2}{x_k} \right) = \\
 &= S_x \left(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_k^2}{x_k} \right) \leq S_x \left(\frac{a_1 S_z}{x_1} + \cdots + \frac{a_k S_z}{x_k} \right) = S_x \left(\frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_k}{x_k} \right) S_z \leq \\
 &\leq S_x (y_1 + \cdots + y_k) S_z = S_x S_y S_z.
 \end{aligned}$$

DISSECCIONS GEOMÈTRIQUES

Joan Trias i Pairó



1. L'art de comptar en Geometria

1.1 Introducció

En geometria podem considerar *configuracions geomètriques* formades per rectes, plans, rectangles, circumferències, esferes o altres objectes menys “regulars”. Aquestes configuracions descomponen l'espai en parts produint el que anomenarem **disseccions geomètriques**, com es pot veure en algunes de les il·lustracions de la figura 1.

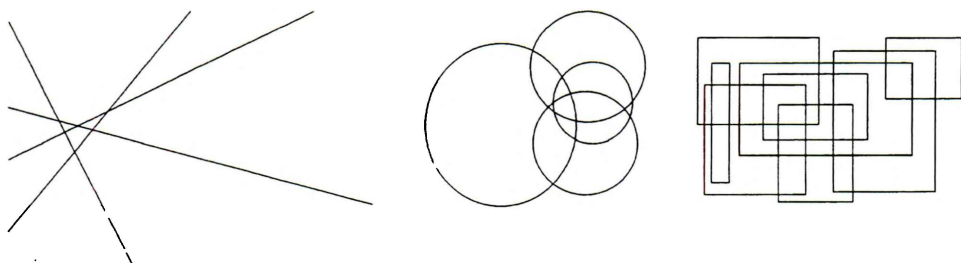


Figura 1. Disseccions geomètriques en el pla creades per rectes, circumferències i rectangles.

Aquestes configuracions generen disseccions geomètriques de l'espai, donen lloc a elements tals com *vèrtexs*, *cares* i *arestes*, i pot ser d'interès saber-los *comptar* o almenys avaluar-ne l'ordre de magnitud o tenir-ne alguna fita superior (vegeu figura 2).

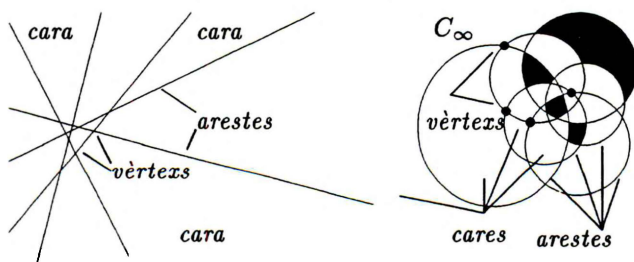


Figura 2. Disseccions amb *vèrtexs*, *arestes*, *cares* (algunes les hem indicat gràficament omplint-les de negre), algunes fitades i d'altres no; en el cas que hi hagi un única cara no fitada la indicarem per C_∞ .

A la dissecció per rectes en el pla es formen *vèrtexs* (interseccions de rectes), “*arestes*” (segments i semirectes) i “*cares*”, que poden ser fitades o no. A la dissecció per circumferències es formen *vèrtexs*, *arestes* (arcs de circumferència), totes fitades i “*cares*” (parts

del pla limitades per arestes); en aquest tipus de dissecció hi ha una única cara no fitada; la resta són cares fitades.

Actualment aquest no és només un tema d'interès acadèmic o de curiositat intel·lectual, ja que aquestes estructures apareixen en aplicacions de *computació geomètrica*, com per exemple en *gràfics per ordinador* o *disseny geomètric assistit per ordinador*; per al disseny i anàlisi dels algorismes subjacents cal saber comptar o avaluar d'alguna manera el nombre d'elements geomètrics d'una estructura geomètrica.

Ens volem centrar en aquesta part de la publicació en problemes de disseccions geomètriques tant al pla com a l'espai i també en problemes que s'hi poden reduir, com són, per exemple, alguns problemes relatius a políedres; un dels avantatges és que sense requerir coneixements molt específics o amplis previs es poden formular enunciats ben entenedors, que es poden mantenir a un nivell elemental, enunciats prou interessants com perquè siguin atractius i al mateix temps, pel que fa al nivell, prou accessibles perquè siguin abordables.

En aquesta introducció veurem algunes tècniques, alguns resultats, i diversos exemples d'entrenament en el problema de comptar objectes geomètrics; seguirà al final una col·lecció d'enunciats per resoldre.

1.2 Les eines de l'ofici

Saber comptar és difícil: exigeix enginy, entrenament, experiència, és tot un art. Ara bé, també hi ha disponibles certes eines bàsiques que podem anomenar eines de l'ofici de comptar, que ens són útils tant per comptar elements en configuracions o disseccions geomètriques com en d'altres circumstàncies.

Dominar l'ofici exigeix l'ús de certes tècniques i disposar de resultats diversos; esmentem el més elemental:

- Disponibilitat d'identitats aritmètiques de sumació tancada.
- La inducció matemàtica, en diverses variants.
- Eines i conceptes de combinatòria elemental (i avançada, però no en aquest context).
- Mètodes elementals de resolució de recurrències.
- Relacions especials, com per exemple, la fórmula d'Euler per a grafs planars i altres.

2. Eines elementals

Exposem en aquest apartat només les eines més elementals que ens poden ser útils per comptar elements en configuracions geomètriques (i en d'altres situacions).

2.1 Identitats aritmètiques de sumació tancada

Algunes identitats aritmètiques interessants són expressions "tancades" de sumes que es presenten amb relativa freqüència, com són per exemple, les següents:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es poden provar de diverses maneres; una de les més usuals és aplicant el mètode d'inducció, com veurem a l'apartat següent.

En moltes ocasions aquestes identitats s'utilitzen auxiliàrment per derivar-ne conclusions més complexes.

Cal tenir present que de vegades es presenten segons diverses variants, com per exemple $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$; s'aplica la mateixa fórmula, però en comptes de n escrivim $n-1$ i resulta, per tant, $1 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)((n-1)+1) = \frac{1}{2}(n-1)n$. O també es presenta en situacions en les que hem de sumar, per exemple, $3 + 4 + \cdots + n$; aleshores és $3 + 4 + \cdots + n = (\sum_{k=1}^n k) - 1 - 2 = \frac{1}{2}n(n+1) - 3$.

En certes ocasions algunes identitats d'aquests tipus les descobrirem a partir d'experiments modestos, possiblement comptant sobre diversos exemples concrets de configuracions; un cop hom està convençut de la certesa d'una identitat, pot intentar de provar-la per inducció.

2.2 La inducció matemàtica

La inducció matemàtica és un mètode de demostració que sol ser molt útil en problemes d'enumeració i de còmput del nombre d'elements de diversos tipus en configuracions geomètriques (i molts altres àmbits de la matemàtica); les situacions a les que hom pot aplicar aquest mètode són essencialment aquelles en les quals es tracta de demostrar una propietat $P(n)$ que s'enuncia en termes dels nombres naturals $n \in \mathbb{N}$.

Un primer exemple de demostració inductiva. Vegem la demostració inductiva de la primera de les identitats, segons l'esquema:

$$\begin{aligned} P(1) \\ P(n) \Rightarrow P(n+1), \end{aligned}$$

on $P(n)$ és la propietat de ser certa la igualtat

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

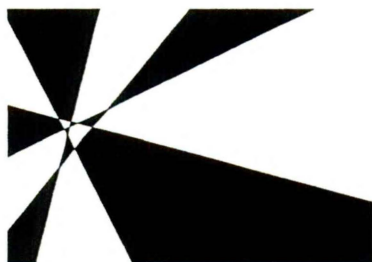
Pas 1. En primer lloc s'ha d'establir la fórmula per al primer valor per al qual tingui sentit, que és en aquest cas $n = 1$; ara bé, per a $n = 1$ la prova és una comprovació rutinària de la coincidència dels dos membres de la igualtat a demostrar.

Pas 2. En segon lloc, hem de suposar que la identitat és certa per a n per *hipòtesi d'inducció* i provar que és certa per al valor $n+1$; aquest pas, juntament amb el primer,

establirà la propietat per a tot $n \geq 1$. Suposant, doncs, que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ es compleix, podem escriure, aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

com volíem demostrar. Anàlogament provaríem d'altres identitats de sumació similars a aquesta.



Inducció en geometria. Considerem una descomposició del pla per n rectes en regions poligonals. Suposem que dues regions tenen frontera comuna si comparteixen una semirrecta o un segment de longitud no nul·la. Proveu que les regions es poden acolorir globalment amb 2 colors, de tal manera que les que tinguin frontera comuna siguin de colors diferents. El lector provarà de convencer-se que l'enunciat és correcte veient que és possible d'acolorir amb dos colors afegint rectes successives a les disseccions

que es van obtenint a partir de $n = 1$; presentarem aquí la demostració formal inductiva, i farem la demostració per inducció sobre n ; suposem que els colors són "blanc" (B) i "negre" (N).

Demostració.

Pas 1. Per a $n = 1$ és cert trivialment assignant colors diferents als dos semiplans produïts per l'única recta.

Pas 2. Suposem que per hipòtesi d'inducció es poden 2-acolorir (segons el criteri de l'enunciat) totes les disseccions per n rectes; en afegir una $(n+1)$ -èsima recta r arbitrària (figura 3) resulta una descomposició del pla en dos semiplans S_1 i S_2 .

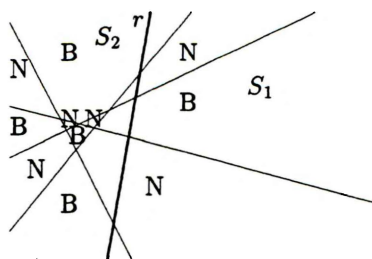
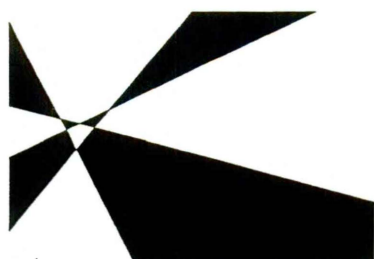


Figura 3

Considerem les coloracions sobre S_1 i S_2 induïdes per la 2-coloració general corresponent a les n rectes: això no constitueix una 2-coloració de la dissecció produïda per les $n+1$ rectes, ja que les cares noves que tenen per frontera comú segments o semirectes sobre r tenen la mateixa coloració. Vegem que podem obtenir una 2-coloració global (figura 4):

1. Mantenim la coloració sobre un dels semiplans, per exemple S_2 ; això deixa establerta una 2-coloració sobre aquest semiplà.
2. Intercanviem els colors de totes les regions de l'altre semiplà, S_1 , és a dir, els blancs passen a negres i els negres passen a blancs: això manté una 2-coloració sobre S_2 i, per l'intercanvi del color de les zones fronteres amb S_1 , obtenim la "compatibilitat" amb la 2-coloració de S_1 ; per tant, globalment s'ha produït una 2-coloració.

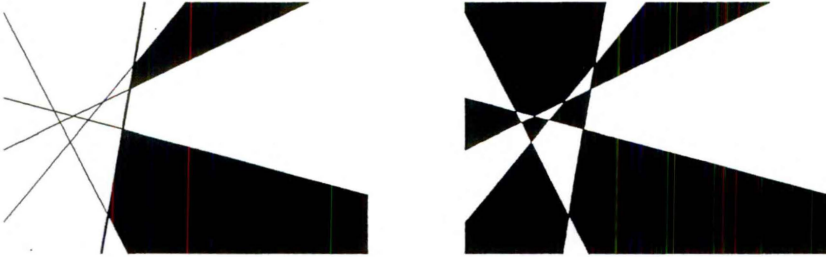


Figura 4.

2.3 Combinatòria elemental

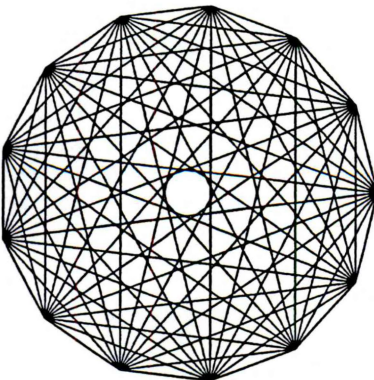
Les eines de la combinatòria són molt útils per comptar elements de configuracions geomètriques; aquí no anirem més enllà de les més elementals. Recordem simplement que el *coeficient binomial* és

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{si } n \geq k \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

on

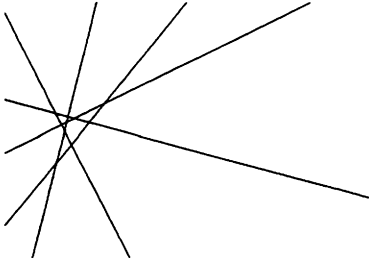
$$k! = \begin{cases} k(k-1) \cdots 2 \cdot 1, & \text{si } k > 0 \\ 1, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Vegem dos exemples senzills:



Exemple 1: Les diagonals d'un polígon. Les diagonals d'un polígon són els segments determinats per parelles de vèrtexs no consecutius inclosos a l'interior del polígon; en el cas d'un polígon convex, qualsevol segment determinat per dos vèrtexs no adjacents està contingut en el polígon i n'és, per tant, una diagonal. Considerem un polígon convex de n vèrtexs; es tracta de calcular el nombre de diagonals del polígon: cada diagonal està determinada per una parella de vèrtexs, sense que importi l'ordre, i el nombre de parelles de vèrtexs que es poden escollir en un conjunt de n vèrtexs és $\binom{n}{2}$, però aquest no és el nombre de diagonals,

ja que també hi són comptats en aquest còmput els costats del polígon, determinats per parelles de vèrtexs consecutius; atès que hi ha n costats, finalment el nombre de diagonals buscat serà $d = \binom{n}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3)$.



Exemple 2: Disseccions planes per rectes. Considerem una dissecció del pla determinada per $n \geq 1$ rectes en posició general, cosa que significa que no n'hi ha dues de paral·leles ni tres que passin per un mateix punt; es tracta de calcular el nombre de vèrtexs, interseccions de rectes, que es produeixen. No pot ser més fàcil: atesa la condició de no haver-ni dues de paral·leles, dues rectes qualsevol determinen un d'aquests vèrtexs i, per l'altra condició, cada vèrtex és intersecció d'exactament dues

rectes; per tant, els vèrtexs són exactament les interseccions de totes les parelles de rectes que es poden formar i, en conseqüència, el nombre de vèrtexs buscat és simplement el nombre de maneres de formar parelles de rectes, és a dir, $\binom{n}{2}$.

2.4 Resolució de recurrències

Una successió recurrent a_n és una successió de la qual coneixem explícitament alguns dels primers termes i una relació que ens permet d'obtenir el terme general en funció dels anteriors,

$$a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Per exemple, en seria una la següent:

$$a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}},$$

que és una possible descripció de la successió els primers termes de la qual serien

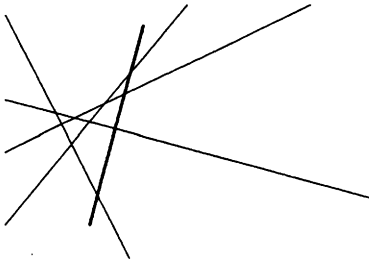
$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \dots$$

Aquests tipus de successions apareixen molt sovint en còmput del nombre d'elements en configuracions geomètriques (nombre de cares, d'arestes i de vèrtexs) i també en processos de demostració inductiva; el que interessa és obtenir el terme general a_n expressat en forma tancada en funció de n ; per exemple, si tenim $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$, aleshores

$a_n = a_{n-1} + 1 = (a_{n-2} + 1) + 1 = \dots = a_1 + 1 + \overset{n-1}{\dots} + 1 = 1 + \overset{n}{\dots} + 1 = n$, tot i que no sempre és tan fàcil com en aquest exemple, realment trivial.

De vegades hom pot experimentar i induir quina és l'expressió del terme general en forma tancada, i aleshores es pot intentar de provar-la per inducció; de fet, hi ha mètodes sistemàtics de resoldre el problema, però no els veurem en aquesta secció. En els exemples

geomètrics i en els problemes, només necessitarem aplicar les fórmules de sumació tancada abans esmentades a l'apartat d'identitats aritmètiques per a la resolució de les recurrències que es puguin presentar.



Exemple geomètric de recurrències. Sigui novament una dissecció del pla per $n \geq 2$ rectes en posició general, és a dir se suposa que no hi ha dues rectes paral·leles ni n'hi ha tres que passin per un mateix punt, i es tracta de calcular el nombre d'arestes a_n de la dissecció (segments de recta i semirectes); considerem una dissecció de n rectes a l'esquema adjunt i considerem una nova $(n+1)$ -èsima recta, indicada amb gruix més gran.

Vegem quin és l'increment d'arestes degut a l'aparició d'una $(n+1)$ -èsima nova recta. La recta $(n+1)$ -èsima talla les n rectes per la condició de no paral·lelisme i produeix globalment n interseccions noves, ja que no pot tallar per la segona condició en un punt d'intersecció, ja preexistent, de dues rectes; la nova recta intercepta, doncs, n rectes que produeixen $n+1$ noves arestes sobre aquesta recta, travessa n arestes de les rectes que intercepta, una per cada recta, i les descompon en dues, amb la qual cosa l'increment net en el nombre d'arestes creades en aquesta operació és de n ; globalment, doncs, l'increment d'arestes és de $(n+1) + n = 2n+1$ i, per tant, $a_{n+1} = a_n + 2n+1$; així, doncs, la successió recurrent a estudiar és

$$a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k + 1, k \geq 1.$$

Així podem escriure:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) + 1, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-2) + 1, \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 2 \cdot 2 + 1, \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1 + 1. \end{aligned}$$

Sumant membre a membre, i utilitzant una identitat aritmètica vista anteriorment, s'obté

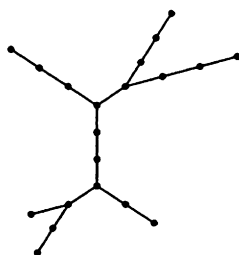
$$a_n = a_1 + 2((n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1) + (1 + \overset{n-1}{\dots} + 1) = a_1 + 2(\sum_{k=1}^{n-1} k) + (n-1) = a_1 + 2 \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2.$$

Observeu que és absolutament sorprenent que aquest resultat (com molts altres de tipus similar) només depengui del nombre de rectes, però no de quines són, és a dir, de com estan situades.

3. La fórmula d'Euler per a disseccions planes

Una relació especialment fructífera per als nostres propòsits de comptar és l'anomenada fórmula d'Euler per a grafs planars poligonals, estructura combinatoria a la quals es poden assimilar certes configuracions geomètriques per tal d'obtenir-ne informació.

3.1 Grafs planars poligonals



la figura 5.

Un graf és una estructura combinatoria que ens permet de representar i estudiar situacions en les quals hi ha una col·lecció d'objectes, que es representen per punts del pla o **vèrtexs**, entre els quals pot haver-hi determinades relacions, que es representen per un enllaç gràfic (segment o arc) o **aresta**; podeu veure adjunt un esquema d'aquestes característiques. En termes formals un **graf** G és un parell ordenat $G = (V, A)$, on V és el conjunt de vèrtexs i A és el conjunt d'arestes, és a dir, de parelles de vèrtexs. Segueixen uns quants exemples de grafs a

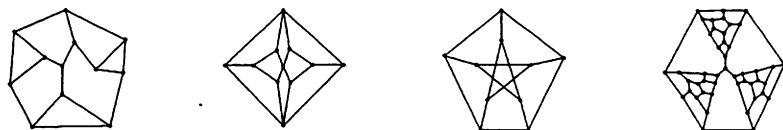
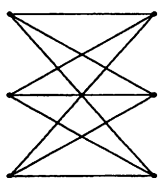


Figura 5

Un concepte interessant és el de *grau* d'un vèrtex, que és el nombre d'arestes que hi són incidents. Suposarem que els grafs amb els quals tractarem són tots d'"una sola peça" (tècnicament, *connexos*), és a dir que no hi ha cap desconexió i tots els vèrtexs són connectables amb tots els altres a través d'algun camí.



Com hem dit, un graf és una estructura combinatoria que pot tenir sentit sense necessitat de cap representació gràfica; ara bé, podem intentar de representar-la en el pla de manera que les arestes no es tallin (considerem que les arestes que són incidents a un vèrtex no s'hi tallen); no sempre és possible, com es pot veure (i provar) en el cas de graf adjunt, anomenat $K_{3,3}$, que és el clàssic graf dels "veïns enemics i els tres subministraments"; per més manipulacions gràfiques

que es facin en el moment de la representació del graf és impossible d'evitar que al menys dues arestes es tallin.

Un graf és **planar** si n'existeix alguna representació en el pla en la qual no hi hagi arestes que es tallin, i en aquest cas tenim una representació planar del graf; a la figura 6 en tenim un exemple; apart dels vèrtexs i arestes, podem parlar de *cares* de la representació planar, entre les qual s'inclou l'única no fitada, que indiquem per C_∞ .

Suposarem que les cares (C_∞ inclosa) són *polígons* (de com a mínim tres costats), sense arestes ni estructures arbòries que hi penguin; aquests són els **grafs planars poligonals**. No

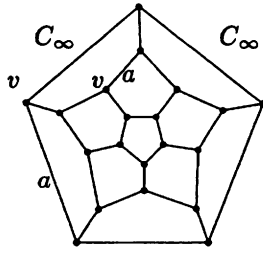


Figura 6. Observeu com la frontera de la cara no fitada C_∞ és també un polígon, concretament un pentàgon.

cal que les arestes siguin segments de recta: poden ser arcs de corba. Algunes disseccions geomètriques en el pla, com per exemple les determinades per n circumferències o per n rectangles són un cas particular de graf planar poligonal.

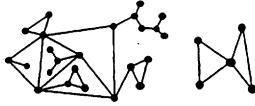


Figura 7. Exemples de grafs planars no poligonals; en el graf de la dreta la frontera de la cara C_∞ no és poligonal.

3.2 Fórmula d'Euler

En el context dels grafs planars poligonals connexos és vàlida l'anomenada **fórmula d'Euler**, que relaciona el nombre v de vèrtexs, el nombre a d'arestes i el nombre c de cares (c inclou la cara C_∞) d'un graf del tipus anterior; concretament podem enunciar el resultat següent:

Teorema (fórmula d'Euler). *Sigui $G = (V, A)$ un graf planar poligonal connex, v el nombre de vèrtexs, a el nombre d'arestes i c el nombre de cares (comptant-hi la cara C_∞ no fitada). Aleshores es compleix:*

$$c + v = a + 2.$$

La demostració de la fórmula d'Euler en aquesta situació simplificada és molt senzilla i ens servirà com a un exercici addicional en el mètode d'inducció, en una situació lleugerament diferent respecte de l'exemple de la demostració per inducció de les identitats aritmètiques; es recomana al lector que s'ajudi dels esquemes corresponents.

Demostració de la fórmula d'Euler. Sigui $G = (V, A)$ un graf planar poligonal connex; considerem-ne una representació planar. Suposem el nostre graf amb v vèrtexs, a arestes i c cares. Farem la demostració per inducció sobre el nombre de cares c .

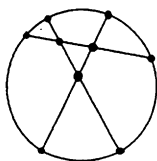


Pas 1. Suposem que $c = 2$, nombre mínim possible per a un graf planar poligonal; aleshores el graf està format per un polígon, les cares són C i C_∞ i resulta ser $a = v$, $c = 2$, amb la qual cosa trivialment es comprova que es compleix la relació.



Pas 2. Sigui $c \geq 3$ i suposem per hipòtesi d'inducció que la fórmula d'Euler es compleix per a tot graf planar poligonal de c' cares, amb $c' < c$; es tracta de manipular el nostre graf per tal de passar a aquesta situació en la qual podem afirmar la validesa de la fórmula i deduir-ne conseqüències per al nostre graf. Considerem dues cares adjacents, és a dir que comparteixen arestes; concretament comparteixen una cadena de r arestes amb els corresponents $r - 1$ vèrtexs; essent $c \geq 3$, si eliminem aquesta cadena, les dues cares es fonen en una i globalment en perdem una. Això és justament el que farem: considerem la cadena de les r arestes comunes a dues cares veïnes de G i eliminem-la; el graf resultant G' segueix essent planar poligonal i es compleix: $v' = v - (r - 1) = v - r + 1$, $a' = a - r$, $c' = c - 1$; atès que $c' < c$ podem aplicar la hipòtesi d'inducció a G' i afirmar, per tant, $c' + v' = a' + 2$. Finalment, substituint a l'última fórmula s'obté $(c - 1) + (v - r + 1) = (a - r) + 2$, d'on $c + v = a + 2$, com s'havia de veure.

Moltes disseccions planes són de fet grafs planars poligonals i els serà, per tant, aplicable la fórmula d'Euler; vegem-ne un exemple a continuació.

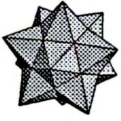


Exemple d'aplicació de la fórmula d'Euler. Es considera la figura adjunta formada per un cercle sobre el qual tracem n segments, amb els extrems situats sobre la circumferència corresponent, que poden o no interseccar-se, de tal manera que no comparteixen extrems sobre la circumferència, és a dir, que cada extrem ho és només d'un segment; suposem que es produeixen p interseccions dels segments a l'interior del cercle i que cada intersecció ho és d'exactament 2 segments diferents (és a dir, que no hi ha 3 segments que passin pel mateix punt). Es tracta de calcular el nombre de regions internes que es formen.

Solució. Calculem el nombre de vèrtexs v : hi ha p vèrtexs interiors a la circumferència, i $2n$ sobre la circumferència; per tant, $v = 2n + p$. Pel que fa al nombre d'arestes a raonem de la manera següent: p vèrtexs interiors aporten 4 arestes cadascun i els $2n$ vèrtexs perifèrics n'aporten 3 cadascun; ara bé, comptant d'acord amb aquesta idea comptem duplicadament totes les arestes, ja que cada arista hi és comptada per cada un dels seus dos extrems, que són vèrtexs; per tant, $4p + 3(2n) = 2a$, d'on resulta $a = 3n + 2p$. Ara aplicarem la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$ i, per tant, $c = (3n + 2p) + 2 - (2n + p) = n + p + 2$. Finalment, el nombre de cares interiors c_i serà $c_i = c - 1 = n + p + 1$. Observem que també es pot calcular immediatament el nombre d'arestes interiors, ja que de perifèriques n'hi ha $2n$ i, en conseqüència, d'interiors n'hi haurà $a_i = a - 2n = n + 2p$. Reviseu on hem fet servir les hipòtesis sobre la configuració.

4. Políedres i fórmula d'Euler

4.1 Políedres regulars i altres políedres



Un *políedre* és un objecte geomètric limitat per cares planes poligonals que és deformable (“homeomorf”) a esfera; en determinades ocasions quan parlem de políedres ens referirem només a aquesta superfície limitant, que serà una superfície polièdrica tancada. Un *convex* és un objecte que conté tots els segments determinats per parelles de punts del mateix objecte; existeixen molts de políedres que no són convexos, com per exemple els *estrellats*, com el que podem veure a la figura adjunta: el políedres estrellats es construeixen col·locant piràmides adequades sobre les cares d'un altre políedre convex. A la figura adjunta veiem un exemple de políedre estrellat, que és no convex.



Són ben coneguts els políedres clàssics, els *políedres regulars*, és a dir el tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosaèdre; a la figura 8 els podem veure i en aquest paràgraf es pot observar un altre políedre (anomenat icosaèdre truncat) que no és un políedre regular, tot i compleix també determinades condicions de regularitat: l'estructura d'aquest últim políedre és la que dona forma a la “pilota de futbol”.

En aquestes figures observem ben clarament elements geomètrics tals com els *vèrtexs*, les *arestes* i les *cares*. Aquest elements defineixen una estructura de connectivitat que depassa les relacions mètriques en les figures (és a dir, les interdistàncies entre els punts dels objectes) i que es manté si es realitzen determinades transformacions, com certes deformacions que no impliquin ni talls ni trencaments de l'estructura.

Direm que un políedre és “regular” si tots els vèrtexs són incidents al mateix nombre d'arestes i totes les cares són polígons del mateix tipus; aquest és un concepte topològic de políedre regular, on només interessa la forma de les cares i les connectivitats entre vèrtexs i, per tant, s'admet deformació. Si a més s'exigeix que les cares siguin polígons regulars del mateix tipus, aleshores estem fent intervenir aspectes mètrics i obtenim els políedres regulars en sentit clàssic, dels quals es pot demostrar que n'existeixen cinc i no més.

tetràedre



cub



octàedre



dodecàedre



icosaèdre

Figura 8. Els cinc políedres regulars

4.2 Políedres i disseccions geomètriques

Perquè parlar de políedres en un tema de disseccions geomètriques? A primera vista no és molta la relació entre políedres i disseccions geomètriques en el pla, però això només és aparent, ja que mitjançant la projecció adequada (tècnicament, una projecció possible és la *projecció estereogràfica*) podem traslladar l'estructura de connectivitat del políedre

(vèrtexs, arestes i cares) al pla, formant així una dissecció plana i traslladant a propietats del políedres algunes propietats que es puguin obtenir a la dissecció; a la figura 9 podem veure un esquema relatiu al que s'ha esmentat.

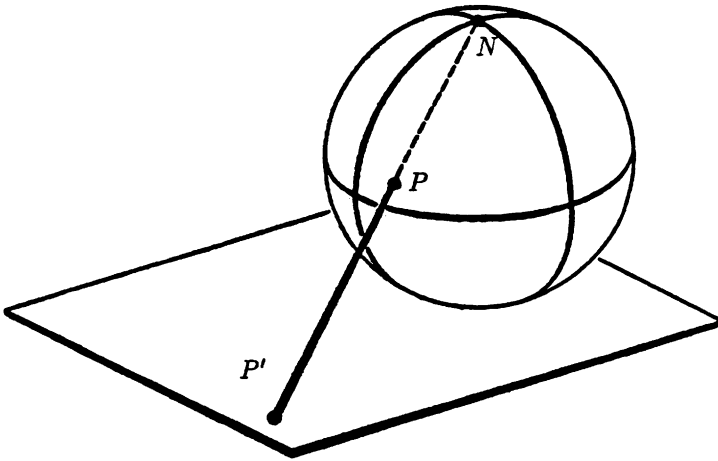


Figura 9. *Projecció estereogràfica. El pla de projecció és tangent a la superfície esfèrica per un punt que podem considerar "pol sud"; el centre de projecció és el punt diametralment oposat o "pol nord" N i la projecció de qualsevol punt $P \neq N$ de l'esfera és la intersecció del pla amb la recta NP.*

A les figures 10,11,12,13 i 14 es veuen projeccions planars o esquemes planars dels políedres regulars; aquestes projeccions poden obtenir-se per projecció estereogràfica, prèvia projecció del políedre sobre l'esfera (deixem molts de detalls tècnics sense precisar), projecció estereogràfica de pol de projecció situat a l'interior del que correspondria a una cara del políedre (el contorn o frontera d'aquesta cara és la que dona lloc a la frontera de l'única cara no fitada de la representació planar corresponent). La projecció estereogràfica és l'eina tècnica rigurosa per fer aquesta operació d'obtenir grafs planars combinatòriament equivalents als políedres, és a dir, amb els mateixos vèrtexs, cares i estructura de connectivitat, oblidant els aspectes mètrics, però de fet es poden obtenir en els casos més senzills aquests esquemes equivalents de forma intuïtiva; el lector es pot entretenir en dibuixar projeccions planars d'altres políedres, com per exemple del cub escapçat o en d'altres políedres més complexos.

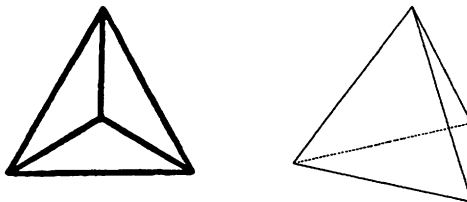


Figura 10.
El tetràedre

4.3 Fórmula d'Euler per a políedres

Una primera conseqüència és la validesa de la fórmula d'Euler per a políedres (suposem-los convexos, per simplificar, però aquesta restricció no és estrictament necessària), és a dir que es compleix:

$$C + V = A + 2,$$

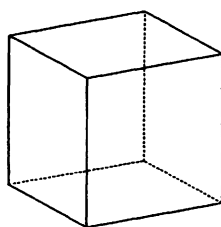
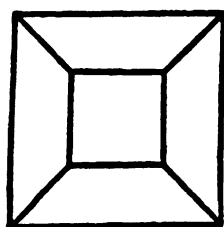


Figura 11.

El cub

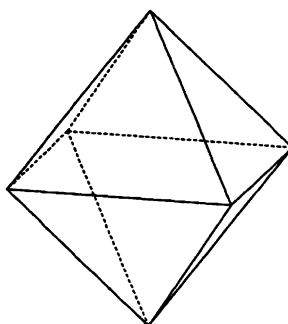
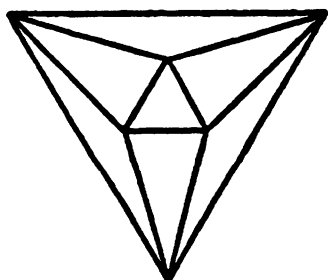


Figura 12.

L'octàedre

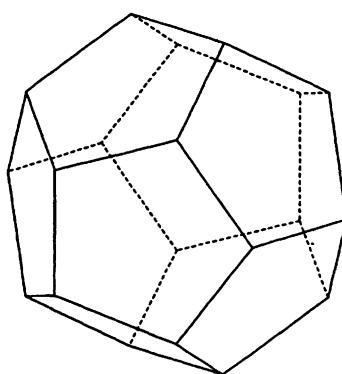
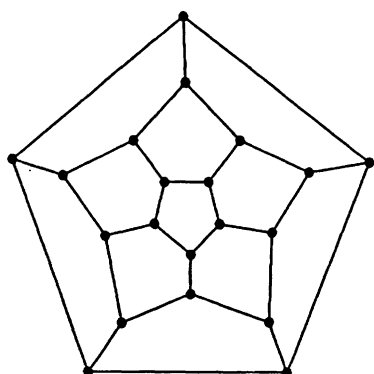


Figura 13.

El dodecàedre

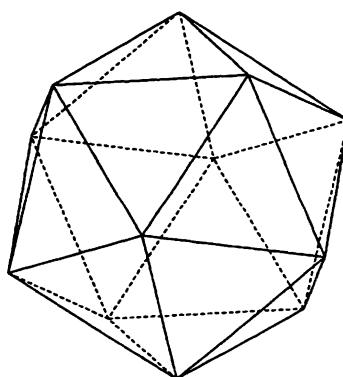
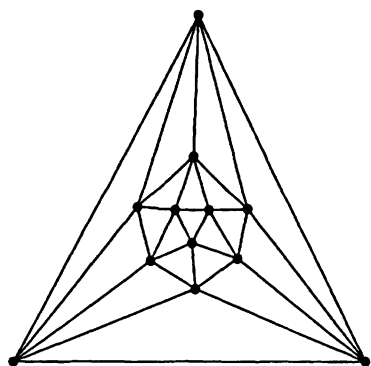


Figura 14.

L'icosàedre

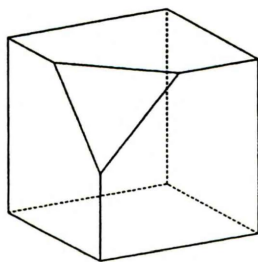
on C el nombre de cares, V el nombre de vèrtexs i A el nombre d'arestes.

4.4 Exemples d'aplicació

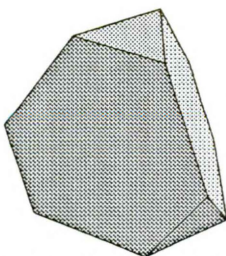
Vegem tres situacions de dificultat progressiva en els quals s'utilitza la fórmula d'Euler per a políedres:



Exemple 1. Si ens diuen que l'icosàedre té 12 vèrtexs i 20 cares, el nombre d'arestes no pot ser altre que $a = c + v - 2 = 30$, i això també és vàlid per a qualsevol deformació "topològica" de la figura.



Exemple 2. Considerem un políedre convex de 10 vèrtexs tal que cada vèrtex és incident amb 3 arestes. Calculeu el nombre de cares i d'arestes. En efecte, considerem un graf planar poligonal associat, per al qual $v = 10$; comptem el nombre d'arestes a partir de les que "aporta" cada vèrtex, que és precisament 3; ara bé, aquesta manera de comptar ens dóna el doble del nombre d'arestes, de manera que poden escriure $3v = 2a$, d'on $a = 15$. Ara apliquem la fórmula d'Euler per obtenir $c = a + 2 - v = 7$. Observeu que el cub escapat de la figura demostra que n'hi ha políedres amb aquestes característiques; construïu diversos grafs planars poligonals associats al políedre.

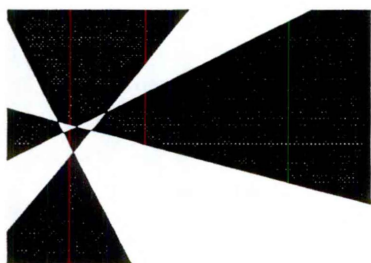


Exemple 3. Considerem un políedre format per cares triangulars i hexagonals, de manera que cada vèrtex és incident amb 3 arestes. Demostreu que té exactament 4 cares triangulars. Obteniu també el nombre de vèrtexs i arestes en funció de les cares hexagonals. Observeu que existeixen políedres que s'ajusten a aquestes característiques, com el de la figura adjunta, que és un tetràedre truncat, obtingut per escapçat o truncament del tetràedre regular.

Solució. Sigui n_3 el nombre de cares triangulars i n_6 el nombre de cares hexagonals; òbviament és $c = n_3 + n_6$. Comptem el nombre d'arestes a partir de les que aporta cada vèrtex: cada vèrtex contribueix amb 3 al càlcul global d'arestes, però com que cada aresta hi és comptada dues vegades, resulta la relació $3v = 2a$; comptem-les ara a partir de les que aporta cada cara: les cares triangulars n'aporten 3, i les hexagonals, 6, però això significa comptar-les duplicadament, ja que totes les cares són polígons i, en conseqüència, tota aresta pertany a la frontera comuna d'exactament 2 cares; per tant, podem escriure $3n_3 + 6n_6 = 2a$. Finalment, utilitzant aquestes relacions i substituint a la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$, s'obté una relació entre n_3 i n_6 , concretament $(n_3 + n_6) + (n_3 + 2n_6) = \frac{3}{2}n_3 + 3n_6 + 2$, d'on se'n deriva que $n_3 = 4$. Al mateix temps s'obté $v = 4 + 2n_6$ i $a = 6 + 3n_6$.

5. Enunciats d'exercicis

Es recomanable d'intentar resoldre els problemes pel màxim de mètodes possibles dels que hom sigui capaç.



DG1.— *Amb dos colors n'hi ha prou (1).* Considereu una descomposició o dissecció del pla per n rectes en regions poligonals. Es considera que dues regions tenen frontera comuna si comparteixen una semirrecta o un segment de longitud no nul·la. Formuleu una altra variant de demostració inductiva del resultat que afirma que una dissecció en el pla és 2-acolorible segons la idea següent: elimineu una recta de la dissecció de n rectes: d'aquesta operació en resulta una dissecció de $n' = n - 1 < n$ rectes

que és 2-acolorible per hipòtesi d'inducció; continueu amb arguments similars als de la demostració donada.

DG2.— *Amb dos colors n'hi ha prou (2).* Es tenen n circumferències en el pla. Proveu que amb 2 colors n'hi ha prou per acolorir el mapa que determinen. Estudieu si és cert un resultat anàleg per a la dissecció determinada per n rectangles com els de la figura 15.

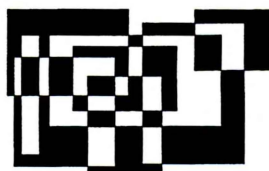
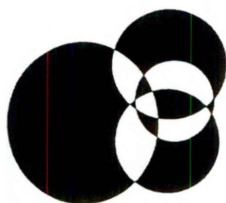


Figura 15

DG3.— *Disseccions per rectes.* Considereu una dissecció del pla per $n \geq 1$ rectes en posició general, cosa que significa que no n'hi ha dues de paral·leles ni tres que es tallin en un punt. La dissecció produeix un nombre v_n de vèrtexs, un nombre a_n d'arestes (segments de longitud no nul·la o semirectes) i un nombre c_n de regions poligonals o cares.

a) Proveu que $v_n = \binom{n}{2}$, $a_n = n^2$ i $c_n = \binom{n}{2} + n + 1$.

b) Calculeu el nombre de cares o regions no fitades. Quin és el nombre de cares fitades?

DG4.— *Disseccions per plans.* Calculeu en quantes regions polièdriques divideixen l'espai n plans en posició general (és a dir, tres qualssevol es tallen i no n'hi ha quatre que tinguin un punt comú).

DG5.— *Disseccions per circumferències.* Considereu n circumferències en el pla en posició tal que es tallen dos a dos i no n'hi ha tres que es tallin en un mateix punt. Calculeu el nombre d'interseccions, d'arcs de circumferència i regions planes (limitades pels arcs) que es produeixen.

DG6.— *Disseccions per esferes.*

a) Calculeu en quantes regions divideixen l'esfera n circumferències sobre l'esfera que es tallen dues a dues.

b) En quantes parts divideixen l'espai n esferes si dues qualssevol es tallen.

DG7.— *Mapes.* Proveu que si a cada vèrtex d'un mapa convergeix un mínim de 3 fronteres, aleshores hi ha un país que com a molt té cinc fronteres.

DG8.— Sigui P un polígon convex de n costats tal que no hi ha tres diagonals que es tallin en un punt.

a) Calculeu el nombre de diagonals.

b) Calculeu el nombre d'interseccions interiors de les diagonals.

c) Calculeu el nombre d'arestes produïdes per les diagonals amb les seves interseccions mútues.

d) Calculeu el nombre de regions poligonals interiors produïdes per les diagonals.

DG9.— Sigui P un políedre convex amb 12 vèrtexs i 30 arestes. Proveu que totes les cares són triangulars.

DG10.— Considereu un políedre convex format per cares triangulars i quadrangulars tal que cada vèrtex pertany a exactament 4 cares. Proveu que conté exactament 8 triangles.

DG11.— Considereu un políedre convex de 10 cares tal que tot vèrtex és incident amb 4 arestes exactament. Calculeu el nombre de vèrtexs i d'arestes.



DG12.— Considereu un políedre de n vèrtexs format per cares triangulars (n 'existeixen, ja que per exemple l'icosàedre n'és un, entre d'altres possibles). Proveu que el nombre d'arestes és $a = 3n - 6$ i que el nombre de cares és $c = 2n - 4$.

DG13.— Proveu que en un políedre de cares quadrangulars es compleix $a = 2v - 4$ i $c = v - 2$.

DG14.— Proveu que per a un políedre de cares pentagonals es compleix $c = \frac{2}{3}(v - 2)$ i $a = \frac{5}{3}(v - 2)$.

DG15.— Demostreu que si un políedre té totes les cares formades per un mateix tipus de polígon, aleshores només poden ser o triangles o quadrilàters o pentàgons.

DG16.— Considerem una dissecció planar poligonal del pla formada per quadrilàters excepte possiblement la cara no fitada. Demostreu que el nombre de vèrtexs de la cara no fitada és parell. Vegeu la versió en termes de políedres: si existeix un políedre amb totes les cares quadrangulars excepte possiblement una, proveu que aquesta hauria de tenir un nombre parell de costats.

DG17.— Demostreu que no existeixen políedres convexos tal que tots els vèrtexs siguin incidents amb sis o més arestes.



DG18.— *Fullerens o pilota de futbol.* Els fullerens són compostos químics de recent descobriment; constitueixen la tercera estructura a l'espai segons la qual es pot trobar el carboni; els àtoms de carboni ocupen els vèrtexs d'un políedre format per cares pentagonals o hexagonals i els enllaços dobles o simples constitueixen les arestes de l'estructura polièdrica, de manera que cada carboni s'enllaça exactament amb tres carbonis veïns. És la mateixa estructura, en un cas concret, que la de la pilota de futbol. Considereu un políedre convex tal que per a tot vèrtex hi ha exactament 3 arestes incidents i les cares són pentagonals o hexagonals. Proveu que ha de tenir exactament 12 cares pentagonals.

DG19.— *Buckminsterfullerè.* El buckminsterfullerè és un compost químic format per 60 àtoms de carboni enllaçats entre sí formant una estructura polièdrica convexa. Cada àtom està enllaçat a exactament 3 àtoms, i sabem que les cares són hexàgons o pentàgons.

- Calculeu el nombre d'hexàgons.
- Calculeu el nombre de pentàgons.
- Calculeu el nombre d'arestes.

DG20.— Demostreu que no existeix cap políedre format per cares hexagonals, pentagonals i amb tots els vèrtexs de grau 4, és a dir, incidents amb 4 arestes.

DG21.— Si un políedre és de cares pentagonals i tots els vèrtexs són incidents amb un mateix nombre g d'arestes, proveu que $g = 3$.



DG22.— *Triangulacions.* Considerem polígons de $n \geq 3$ vèrtexs (no necessàriament convex) sense forats; una *diagonal interna* d'un polígon és un segment determinat per dos vèrtexs no consecutius, contingut al polígon. Una *triangulació* d'un polígon és una descomposició en reunió de triangles produïts afegint diagonals internes, de tal manera que els solapaments entre triangles siguin d'àrea nul·la. La descomposició no és única, com es pot veure fàcilment. Demostreu:

- Un polígon sempre és triangulable. *Indicació:* demostreu l'existència d'alguna diagonal interna, utilitzeu-la per descompondre el polígon en dos polígons de nombres inferiors de costats respectivament i acabeu la demostració per inducció.
- Si tenim una triangulació d'un polígon mitjançant t triangles produïts afegint m diagonals internes, calculeu t i m en funció de n , demostrant així que són independents de la particular triangulació, i només depenen del nombre de vèrtexs. El resultat a provar és: $t = n - 2$, $m = n - 3$.
- Demostreu com a conseqüència dels apartats anteriors que la suma dels angles interiors d'un polígon de n costats és $\pi(n - 2)$. Quina és la suma dels exteriors?

d) Un vèrtex d'un polígon es diu *convex* si l'angle interior corresponent és menor estricta que π . Proveu que tot polígon té un mínim de 3 vèrtexs convexos.

DG23.— *Enunciat de la XXX Olimpíada Matemàtica, 26 de Febrer 1994 (generalitzat).* Un polígon de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'alguns altre triangle contigu o del polígon donat.

a) Demostreu que $m + n$ és parell.

b) Coneguts n , m , trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden a aquest interior.

Indicació: podeu resoldre'l directament, utilitzant la fórmula d'Euler, o bé indirectament utilitzant els resultats del problema de triangulació. En el cas convex la resolució és més simple.

EQUACIONS FUNCIONALS

Claudi Alsina i Català

El gran motor de les matemàtiques és la resolució de problemes, activitat en la qual es combinen enginy i coneixement, mètode científic i aventura intel·lectual. En aquest petit article us voldriem aproximar a la resolució d'unes equacions molt especials dites equacions funcionals.

La teoria d'equacions funcionals ha nascut aquest segle de la mà d'un gran matemàtic hongarès: el professor Janos Aczél. Els precedents històrics són moltes contribucions disperses de J. D'Alembert, L. Euler, L.A. Cauchy, A.M. Legendre, C.F. Gauss, etc., que a partir del naixement del concepte de funció estudiaren algunes equacions on les incògnites eren funcions. Avui hi ha uns 200 matemàtics al món dedicats a resoldre aquestes equacions les quals neixen o de la pròpia matemàtica o de molts camps d'aplicació com són l'economia, la computació, la física, l'estadística, etc.

Aquí farem una presentació senzilla d'equacions funcionals per tal que si teniu ocasió de participar en olimpíades matemàtiques, on sovint hi ha problemes amb aquestes equacions, sapiguen com atacar-los. Resoldre aquestes equacions és una activitat matemàtica apassionant a la que tots i totes hi esteu convidats ara i sempre.

Però... què és una equació funcional?

Amb llenguatge senzill podem dir que una *equació funcional* és una igualtat on l'incògnita és una funció (o diverses).

Observeu les següents igualtats:

$$(1) \ 2 + 2 = 4 \qquad (2) \ 8x^2 + x - 1 = 0 \qquad (3) \ f(x \cdot y) = f(x) + y$$

El cas (1) és una identitat aritmètica, el cas (2) és una equació algebraica de segon grau on l'incògnita x podrà ser aïllada mitjançant un procés que ens portarà als possibles valors numèrics solució. El cas (3) és una equació funcional: desitgem saber quines funcions f poden satisfer la relació donada en (3).

Les següents expressions són equacions funcionals:

$$(4) f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(5) f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

$$(6) f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

$$(7) f(x^2) = 2f(x)$$

$$(8) f(f(x)) = x$$

$$(9) f(x^2) + f(x) = \sin x$$

En els casos (4), (5) i (6) trobem equacions funcionals amb diverses variables (x, y) mentres que en (7), (8) i (9) veiem equacions funcionals en una sola variable (x) . En tots aquests casos la funció incògnita f és d'una variable. També hi ha equacions amb diverses funcions incògnites i amb funcions de diverses variables.

L'equació més emblemàtica

Per la seva llarga història, i per la seva constant presència en la resolució de moltes altres equacions, destaca amb llum pròpia l'equació funcional de Cauchy:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Fent $x = y = 0$ resulta $f(0) = 0$ i aleshores fent $y = -x$ resulta $f(-x) = -f(x)$. En els nombres naturals hom obté:

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_n) = f(1) + \underbrace{\dots + f(1)}_n = f(1) \cdot n.$$

En els nombres enters, vist que $f(+n) = f(1) \cdot (+n)$ en els positius, $f(0) = 0$ i $f(-n) = f((-1)n) = -f(n) = f(1)(-n)$ també resulta que $f(x) = f(1) \cdot x$. En els nombres racionals m/n amb $m, n > 0$ serà

$$f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n,$$

o sigui $f(1/n) = f(1)/n$ i per tant

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot m = f(1) \frac{m}{n}$$

i d'aquí $f(x) = f(1) \cdot x$.

En els nombres reals poden existir infinites solucions de l'equació de Cauchy diferents de $f(x) = f(1) \cdot x$ si hom no suposa cap condició especial a f . Però si es suposa que f és contínua en la recta real o f és contínua en un punt o f és creixent o decreixent, o f és

positiva en un interval, etc. aleshores $f(x) = f(1) \cdot x$ és l'única solució. La idea bàsica és que si $f(x) = f(1)x$ en els racional i suposem continuïtat, com que qualsevol real es pot aproximar per racional aleshores passant al límit també serà $f(x) = f(1)x$ per a qualsevol real x .

Equacions relacionades amb la de Cauchy i molt bàsiques són les següents:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

que té com a solucions contínues $f(x) \equiv 0$ i $f(x) = e^{cx}$. Si considerem l'equació

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

vàlida per tot $x, y > 0$ i f és contínua aleshores $f(x) = c \ln |x|$. Si

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

les solucions contínues són $f(x) = |x|^c$ ($|$ indica valor absolut), $f(x) = 0$ i $f(x) = |x|^c \cdot \text{signe}(x)$. Si mirem l'equació de Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

les solucions contínues són rectes $f(x) = ax + b$. En el cas de l'equació de D'Alembert

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot f(y)$$

trobem les solucions contínues $f(x) \equiv 0$, $f(x) = \cos bx$, $f(x) = \cosh bx$ (cosinus hiperbòlic).

Cal notar com apareixen solucions amb constants arbitràries però que hi ha casos en que les solucions poden dependre de funcions arbitràries. Això passa molt amb les equacions d'una sola variable. D'una equació o condició tal com $f(-x) = f(x)$ el màxim que podríem dir es que la seva solució és

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \leq 0, \\ g(-x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

on g és una funció arbitrària definida en els reals no positius.

Que és el primer que cal mirar en una equació funcional?

Hi ha diverses informacions, explícites o implícites, que són importants d'observar en considerar una equació funcional:

(a) *Quin és el domini?*

Pot tractar-se de funcions definides en nombres naturals, enters, racionals, reals, complexos... o en un subconjunt d'aquests o en vectors, o matrius o d'altres funcions... Quins elements distingits hi ha en el domini i quina estructura hi coneixem? Això ajudarà a fer substitucions o a operar.

(b) *Quin és el conjunt de valors?*

Pot tractar-se de funcions que pren valors en el mateix domini o en un altre conjunt... i això pot delimitar les solucions possibles.

(c) *Quines funcions o operacions conegudes hi ha?*

Ben segur que a l'equació hi ha moltes vegades, junt a la funció incògnita, algunes funcions conegudes que ens seran d'ajut en fer càlculs.

(d) *Quines condicions satisfà la funció incògnita?*

A més de l'equació podem tenir condicions addicionals com continuïtat, creixement, positivitat,... etc. Aquestes condicions ens han de permetre fer determinades operacions i a la vegada ens delimitaran les solucions que cerquem.

Problema. Determineu les funcions $f(x)$ definides en els enters i que prenen valors reals positius que són estrictament creixents i satisfan l'equació

$$f(x + y) = f(x) \cdot e^y.$$

Aquí tant x com y són enters; $f(x+y)$ i $f(x)$ són reals positius; en l'equació apareixen les funcions conegudes $x+y$ (suma), $a \cdot b$ (producte) i e^y (exponencial). Volem f estrictament creixent.

Per exemple, fent la substitució $x = 0$ tindrem

$$f(y) = f(0 + y) = f(0) \cdot e^y$$

que determina totalment $f(y)$, llevat d'una constant arbitrària $f(0)$ que haurà de ser positiva. Noteu que si feu la substitució $y = 0$ no sortiria res ($f(x) = f(x)$) i que si no

s'haguès dit res sobre el creixement estricte de f hauria pogut sortir la solució $f(y) \equiv 0$ (amb $f(0) = 0$) o $f(y) = f(0) \cdot e^y$ amb $f(0)$ qualsevol valor. Si s'haguès dit que f prenia valors enters i res sobre creixement hauria sortit $f(y) = f(0)e^y$ la qual cosa donaria valors enters sols en el cas $f(0) = 0$.

Set bons consells que podeu fer vostres

Avui es coneixen bastants mètodes per a resoldre equacions funcionals. Alguns són senzills i ràpids. D'altres són sofisticats i lents. Però triar un bon mètode és, i serà sempre, un art. Cada equació és un repte que exigeix fer-hi feina i posar-hi imaginació. L'ofici matemàtic ens porta no sols a resoldre aquestes equacions sino també a fer-ho de la manera més simple possible, la més elegant. Per ajudar-vos a resoldre equacions senzilles us oferim set consells que podeu tenir en compte.

I. Una mateixa equació pot tenir solucions diferents en dominis diferents o en rangs diferents o en classes de funcions diferents.

En efecte, considerem l'equació

$$(*) \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Si suposem que el nombre zero pertany al domini de la funció podem fer $x = y = 0$ en $(*)$ i surt $f(0) = f(0) + f(0)$ o sigui $f(0) = 0$ i fent ara la substitució $y = 0$ en $(*)$ on deixarem la variable x arbitrària tindrem $f(x \cdot 0) = f(x) + f(0)$, és a dir, $f(x) \equiv 0$. Així sols la funció zero és solució de $(*)$ quan el nombre 0 és del domini de f . En canvi si el zero no pertany al domini l'equació $(*)$ pot tenir altres solucions com $f(x) = \log|x|$. Seguint explotant $(*)$ podem notar que si l'imatge de f estés situada en els nombres reals positius aleshores $\log|x|$ no seria solució i si volguéssim veure solucions f de $(*)$ estrictament creixents de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, en ser $f(y) > 0$ i tenir $f(x) < f(x) + f(y) = f(xy)$ aleshores per $0 < x, y < 1$ seria $xy < x$ i $f(x) < f(xy) < f(x)$ contradicció que ens diu la no existència de solucions estrictament creixents.

II. Feu substitucions de les variables per valors numèrics i intenteu treure el màxim profit del coneixement de la funció en certs valors... jugant amb la pròpia equació i extenent les solucions d'uns dominis a d'altres més amplis.

D'acord amb el domini de les funcions incògnites és recomanable fer substitucions de les variables per valors especialment rellevants per al domini i per a l'equació. Per exemple, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2^k$, $x = -1$,... anar mirant com es comporta la funció en punts concrets o en subconjunts interessants del domini (nombres naturals, potències de dos, nombres primers, nombres enters, nombres racionals,...).

Problema (CMO 75). Sigui f una funció dotada de les següents propietats:

- (1) $f(n)$ està definida per qualsevol enter positiu n ;
- (2) $f(n)$ és un nombre enter;
- (3) $f(2) = 2$;
- (4) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ per a tots els enters positius n i m ;
- (5) $f(m) > f(n)$ sempre que $m > n$.

Demostreu que $f(n) = n$ per a tot enter positiu.

Solució. Combinant (3) i (4) resulta $f(2^k) = 2^k$ per tot $k = 0, 1, 2, \dots$. Tenint en compte que

$$2^k < 2^k + 1 < 2^k + 2 < \dots < 2^k + 2^k - 1 < 2^{k+1},$$

resultarà per als valors de f :

$$2^k = f(2^k) < f(2^k + 1) < \dots < f(2^{k+1} - 1) < f(2^{k+1}) = 2^{k+1},$$

la qual cosa diu que entre 2^k i 2^{k+1} hi ha $2^{k+1} - 2^k - 1 = 2^k - 1$ enters diferents. Per tant $f(2^k + j) = 2^k + j$, i $f(n) = n$ per a tot n .

Problema (AMO 95) Determineu totes les funcions que prenen valors reals i definides en el conjunt dels nombres reals positius tals que:

- (1) $f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right)$ per a x, y reals positius;
- (2) $f(1) = \frac{1}{2}$.

Solució: Usant (2) i (1) amb $x = y = 1$ resulta $f(3) = 1/2$ i fent $y = 1$ en (1) tindrem aleshores $f(x) = f(x)f(3) + f(1)f\left(\frac{3}{x}\right)$, és a dir, $f(3/x) = f(x)$. Aquesta descoberta ens permet reescriure (1) en la forma $f(xy) = 2f(x)f(y)$ i fent $x = y$ tindrem

$$\begin{aligned} 2f(x)^2 &= f(x^2) = f(x) \cdot f\left(\frac{3}{x}\right) + f(x)f\left(\frac{3}{x}\right) \\ &= f\left(x \cdot \frac{3}{x}\right) = f(3) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

és a dir, $f(x)^2 = 1/4$ i per tant

$$f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = 2f(\sqrt{x})f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = 2f(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}.$$

Problema (TELECOM 93 AMO) Per a cada funció definida en tots els reals i satisfent:

- (i) $f(x \cdot y) = x \cdot f(y) + f(x) \cdot y$;
- (ii) $f(x + y) = f(x^{1993}) + f(y^{1993})$; determineu el valor $f(\sqrt{5753})$.

Solució. Fent $x = y = 1$ en (i) resulta $f(1) = 0$ i fent $x = y = 0$ en (ii) surt $f(0) = 0$. Si aleshores fem $y = 0$ en (ii) serà $f(x) = f(x + 0) = f(x^{1993}) + f(0) = f(x^{1993})$, és a dir, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ i per tant en els naturals serà $f(n) = f(1) \cdot n = 0$. Usant ara (i) serà per a $x = y = \sqrt{5753}$, $2\sqrt{5753}f(\sqrt{5753}) = f(5753) = 0$ o sigui $f(\sqrt{5753}) = 0$.

III. Feu canvis de variables o substitucions que lliguin les variables entre sí i estudieu les equacions que resulten en aquests dominis restringits

Si en una equació amb dues variables x, y feu $y = x$ us quedarà una equació d'una sola variable per analitzar. També podeu fer proves de l'estil $y = tx$, $y = x^2$, ... podeu combinar perfectament aquestes "noves" equacions amb les de partida.

Problema (AMO 91) Demostreu que hi ha exactament una funció f definida en tots els reals no nuls que satisfà

- (i) $f(x) = xf(1/x)$, per tot real x no nul;
- (ii) $f(x) + f(y) = 1 + f(x + y)$, per tota parella (x, y) de reals no nuls i tals que $x \neq -y$.

Solució. Fent la substitució $x = y = t/2$ en (i) i (ii) resulta

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}f\left(\frac{2}{t}\right) \quad \text{i} \quad 2f\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + f(t),$$

i combinant ambdues expressions tenim

$$\frac{1 + f(t)}{t} = \frac{2}{t}f\left(\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{2}{t}\right) = 2f\left(\frac{1}{t}\right) - 1 = \frac{2}{t}f(t) - 1,$$

és a dir, $f(t) = 1 + t$. És immediat verificar que $1 + t$ satisfà les condicions inicials.

IV. Observeu l'equació funcional amb detall i esbrineu si coneixeu d'entrada alguna solució. Aquesta informació pot ser molt útil per a resoldre-la.

En efecte si $f_0(x)$ és una solució particular que es veu a ull podeu, per exemple, introduir una nova funció $h(x) = f(x) - f_0(x)$ i intentar veure si l'equació satisfeta per $h(x)$ porta a $h(x) \equiv 0$. També podríem introduir $h(x) = f(x)/f_0(x)$ si f_0 mai no s'anul·lés i intentar veure si $h(x) \equiv 1$.

Problema (TELECOM 94 AMO) Determineu totes les funcions f , definides en tots els nombres racionals i amb valors reals, tals que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Solució. Mirant l'equació amb ulls atents descobrim que sabem veure almenys la solució $f(x) = x^2$ ja que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Introduïm aleshores la funció $h(x) = f(x) - x^2$ i mirem quina equació satisfarà:

$$\begin{aligned} h(x+y) + (x+y)^2 &= f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \\ h(x) + x^2 + h(y) + y^2 + 2xy, \end{aligned}$$

i simplificant resulta $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Així amb gran alegria retrobem l'equació de Cauchy i ja sabem que $h(x) = c \cdot x$ en els x racionals. Per tant, haurà de ser $f(x) = h(x) + x^2 = cx + x^2$. Però hem de comprovar si realment aquesta funció és solució per a qualsevol valor de c :

$$f(x+y) = c(x+y) + (x+y)^2 = cx + x^2 + cy + y^2 + 2xy = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Feina ben feta! Finalment s'ha resolt totalment el problema.

V. Intenteu introduir canvis funcionals que us permetin passar de l'equació donada a un altre ja coneguda... i torneu endarrera desfent el canvi.

Això ho fem sempre resolent problemes de matemàtiques: aprofitar problemes coneguts per a resoldre'n d'altres.

Problema. Trobeu les funcions f definides en els nombres racionals i amb valors reals positius que satisfan l'equació

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

per a qualssevol x, y reals.

Solució. Coneixent la funció logaritme neperià i aplicant-la als dos membres de l'equació (la qual cosa té sentit ja que suposem $f(x)$ estrictament positiva):

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y),$$

Així la nova funció $g(x) = \ln f(x)$ satisfà l'equació de Cauchy en els racionals i per tant serà $g(x) = g(1)x$, és a dir, $\ln f(x) = \ln f(1) \cdot x$, o sigui, $f(x) = e^{\ln f(1) \cdot x}$, essent $\ln f(1) = k$ una constant. És fàcil veure que la funció e^{kx} satisfà l'equació qualsevol que sigui k . Noteu que per $k = 0$ tenim la solució constant $f(x) \equiv 1$.

VI. Tenint en compte la pròpia equació funcional i les condicions requerides a la funció incògnita podeu deduir noves condicions de la funció... que a la seva vegada poden ajudar a resoldre l'equació.

Sovint trobareu equacions i condicions sobre les funcions incògnites tals como ser creixent, decreixent, positiva, continua, derivable, bijectiva,... aleshores mireu si l'equació us permet deduir alguna condició més.

Problema. Una funció f definida en els nombres reals i a valors reals positius satisfà l'equació $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Proveu que f es estrictament creixent.

Solució. Com que $f(z) > 0$ per a tot real z aleshores si $x < y$ serà $f(y) = f(x + (y-x)) = f(x) + f(y-x) > f(x)$ i per tant f és estrictament creixent.

Problema (AMOC 95). Sigui f una funció, definida en tots els nombres reals i prenent valors reals no nuls, tal que

$$f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$$

per a tot x . Proveu que f és periòdica, és a dir, existeix un nombre positiu P tal que $f(x+P) = f(x)$ per a tots els nombres reals x .

Solució. Caldrà manipular directament l'equació donada fins a fer apareixer la condició de periodicitat:

$$\begin{aligned} f(x+6) &= f(x+4+2) = f(x+4-1)f(x+4+5) \\ &= f(x+3)f(x+9) = f(x+1+2)f(x+9) \\ &= f(x) \cdot f(x+6) \cdot f(x+9), \end{aligned}$$

i essent f mai nul·la, resulta $f(x+9) = 1/f(x)$ d'on $f(x+18) = f(x+9+9) = \frac{1}{f(x+9)} = f(x)$. Vet aquí que el període buscat és $P = 18$ (o un dels seus múltiples!).

VII. Cal verificar sempre si les funcions obtingudes resolent una equació funcional són realment solucions de l'equació de partida.

Com que en resoldre una equació fem substitucions, igualtats o relacions entre variables, etc., pot ser que surti una funció que essent solució d'una de les equacions intermèdies no ho sigui de l'equació inicial. I també pot succeir que en verificar si una "aparent" solució ho és realment ens veiem forçats a restringir la classe de solucions.

Problema. Trobeu les funcions f , definides en els nombres reals i a valors reals, que satisfan l'equació funcional

$$f(x^2 + y) = f(x) + y^2,$$

per a tots els x, y reals.

Solució. Fent la substitució $x = 0$ resulta $f(y) = f(0) + y^2$, però en verificar si aquesta funció satisfà l'equació de partida ens trobem que hauria de ser

$$f(0) + (x^2 + y)^2 = f(0) + x^2 + y^2,$$

que és impossible. Per tant l'equació donada no té solució.

Problema (CMO 68). Sigui k un enter positiu. Trobeu tots els polinomis $P(x)$ amb coeficients reals satisfent l'equació $P(P(x)) = P(x)^k$.

Solució. Sigui $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ de grau n . Si $P(x)$ ha de satisfer $P(P(x)) = P(x)^k$, deurà ser: grau $P(P(x)) = n^2 =$ grau $P(x)^k = n \cdot k$, o sigui, $n^2 = nk$, la qual cosa porta als casos $n = 0$ o $n = k$. Si $n = 0$ serà $P(x) = a_0$ constant i en satisfer-se $a_0^k = a_0$ resultarà que si $k = 1$, a_0 es qualsevol constant però si $k \neq 1$ necessàriament $a_0 = 0$ o $a_0 = 1$. Si $n = k$ i $a_k \neq 0$, mirant els coeficients de x^{k^2} en la igualtat $P(P(x)) = P(x)^k$ resulta $a_k^{k+1} = a_k^k$ d'on $a_k = 1$. Aleshores (feu-ho!) surt també $a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = a_1 = a_0 = 0$ resultant en aquest cas $P(x) = x^k$.

Problemes.

Els següents problemes han sortit en l'Olimpíada Matemàtica Internacional (IMO) o en l'Austriana (AMO). Són vint reptes que podeu intentar resoldre. En l'apartat final d'indicacions podrem confirmar les solucions trobades o si aneu perduts veure com podríeu començar.

EF1.—(IMO 68). Sigui f una funció real definida per a tots els nombres reals x i tal que, per alguna constant positiva a , f satisfà l'equació $f(x+a) = \frac{1}{2} + (f(x) - [f(x)]^2)^{1/2}$, per a tot x . Demostreu que la funció f és periòdica (és a dir, existeix un nombre positiu b tal que $f(x+b) = f(x)$ per a tot x). Per $a = 1$, doneu un exemple d'una funció no constant que satisfaci les propietats esmentades anteriorment.

EF2.—(IMO 72). Siguin f i g funcions reals definides per a tots els valors reals x, y i satisfent l'equació $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$, per tots els x, y . Demostreu que si $f(x)$ no és idènticament zero i si $|f(x)| \leq 1$ per a tot x , aleshores $|g(y)| \leq 1$, per a tot y .

EF3.—(IMO 75). Trobeu tots els polinomis P de dues variables que satisfan les següents condicions:

(i) Per a un enter positiu n i per a tots els reals t, x, y és $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$; és a dir, P es homogeni de grau n .

(ii) Per a tots els reals a, b, c , és

$$P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0,$$

(iii) $P(1, 0) = 1$.

EF4.—(IMO 77). Sigui $f(n)$ una funció definida en el conjunt de tots els enters positius i amb valors en el mateix conjunt. Demostreu que si $f(n+1) > f(f(n))$ per a qualsevol enter positiu n , aleshores $f(n) = n$, per a tot n .

EF5.—(IMO 78). El conjunt de tots els enters positius és la unió de dos subconjunts disjunts $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ i $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$, ón $f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots$, $g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots$ i $g(n) = f(f(n)) + 1$ per a qualsevol $n \geq 1$. Determineu $f(240)$.

EF6.—(IMO 81). La funció $f(x, y)$ satisfà les equacions:

$$(1) f(0, y) = y + 1, \quad (2) f(x + 1, 0) = f(x, 1), \quad (3) f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)),$$

per a tots els enters no-negatius x, y . Determineu $f(4, 1981)$.

EF7.—(IMO 82). La funció $f(n)$ està definida per a tots els enters positius n i pren valors enters no negatius. Ademès, per a tot m, n és $f(m + n) - f(m) - f(n) = 0$ o 1 , $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ i $f(9999) = 3333$. Determineu $f(1982)$.

EF8.—(IMO 83). Trobeu totes les funcions f definides en el conjunt dels nombres reals positius prenent valors reals positius i satisfent les condicions: $f(x \cdot f(y)) = yf(x)$ per a tots els positius x, y ; $f(x) \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow \infty$.

EF9.—(IMO 84). Determineu totes les funcions contínues f tals que, per a tots els valors reals x, y , $f(x + y) \cdot f(x - y) = \{f(x) \cdot f(y)\}^2$.

EF10.—(IMO 86). Trobeu totes les funcions f , definides en els nombres reals no negatius i prenent valors reals no negatius, tals que

$$(i) f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y) \text{ per tot } x, y \geq 0;$$

$$(ii) f(2) = 0;$$

$$(iii) f(x) \neq 0 \text{ si } 0 \leq x < 2.$$

EF11.—(IMO 87). Demostreu que no pot existir una funció f del conjunt dels enters no negatius en ell mateix tal que $f(f(n)) = n + 1987$ per a tot n .

EF12.—(AMO 87). Una funció $f(m, n)$ està definida, per a tots els enters positius $m \geq n$, per:

(i) $f(m, n) = \sqrt{n + f(m, n+1)}$, si $m > n$;

(ii) $f(n, n) = \sqrt{n}$; per a tot n .

Proveu que $f(1988, 1) < 2$.

EF13.—(IMO 88). Una funció f està definida en els enters positius per $f(1) = 1$; $f(3) = 3$; $f(2n) = f(n)$; $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$; $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$; per a tots els enters positius n . Determineu el nombre d'enters positius n , menors o iguals que 1988, per als quals $f(n) = n$.

EF14.—(AMO 88). Una funció f satisfà les següents condicions

(i) Per a cada nombre racional x , $f(x)$ és un nombre real;

(ii) $f(1988) \neq f(1987)$;

(iii) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - f(xy) + 1$, per tots els racionals x, y .

Demostreu que $f(-1987/1988) = 1/1988$.

EF15.—(AMO 89). Sigui $f(n)$ definida per a tots els enters positius n . Se sap que

(i) $f(f(n)) = 4n + 9$, per a tot enter positiu n ;

(ii) $f(2^k) = 2^{k+1} + 3$, per a tot enter no negatiu k .

Determineu $f(1789)$.

EF16.—(IMO 90). Sigui $\mathbb{Q}^+$ el conjunt de nombres racionals positius. Construïu una funció $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ tal que $f(xf(y)) = f(x)/y$, per a tots x, y en $\mathbb{Q}^+$.

EF17.—(AMO 90). Sigui f una funció definida en tots els nombres reals i amb valors reals. Suposem que, per a tots els reals x, y , la funció f satisfà

(1) $f(2x) = f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi y}{2}\right)\right)$;

(2) $f(x^2 - y^2) = (x+y)f(x-y) + (x-y)f(x+y)$.

Demostreu que aquestes condicions determinen unívocament $f(1990 + 1990^{1/2} + 1990^{1/3})$ i doneu el seu valor.

EF18.—(IMO 92). Sigui $\mathbb{R}$ el conjunt dels nombres reals. Trobeu totes les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$, per a tot x, y en $\mathbb{R}$.

EF19.—(IMO 93). Sigui $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Determineu si pot existir una funció $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(1) = 2$, $f(f(n)) = f(n) + n$ per a tot n en $\mathbb{N}$ i $f(n) < f(n+1)$, per tot n en $\mathbb{N}$.

EF20.—(IMO 94). Sigui S el conjunt de nombres reals estrictament més grans que -1 . Trobeu totes les funcions $f : S \rightarrow S$ satisfent les dues condicions:

- (a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$, per a tot x, y en S ;
- (b) $f(x)/x$ és estrictament creixent en cada un dels intervals $-1 < x < 0$ i $0 < x$.

Indicacions per a llegir... si cal.

EF1. Fixeu l'atenció en el període $b = 2a$. Considereu l'exemple $(1 + |\sin \frac{\pi}{2}x|)/2$.

EF2. Supposeu que existís un punt y_0 on fos $|g(y_0)| > 1$ i per ser $|f(x)|$ afitada considereu M la menor fita superior. Emprant l'equació obtindreu una contradicció.

EF3. Fent les substitucions $b = 1 - a$, $c = 0$ i $c = 1 - a - b$ podreu verificar que $f(x) = P(x, 1 - x) + 2$ satisfà l'equació bàsica de Cauchy. D'ací i usant (i) arribareu a $P(x, y) = (x + y)^{n-1}(x - 2y)$.

EF4. Raoneu perquè $1 \leq f(1) < f(2) < f(3) < \dots$ i que passaria si existís un enter positiu k tal que $f(k) > k$.

EF5. Com sigui que $g(1) = f(f(1)) + 1 > 1$, $f(1) = 1$ i $g(1) = 2$. Demostreu aleshores que si $f(n) = k$ necessàriament és $f(k) = k + n - 1$, $g(n) = k + n$ i $f(k + 1) = k + n + 1$. Emprant aquestes relacions provareu que $f(240) = 388$.

EF6. A partir de les equacions determineu que $f(1, y) = y + 2$, $f(2, y) = 2y + 3$, $f(3, y) = 2^{y+3} - 3$ i finalment $f(4, y) = 2^{2^{\dots^2}} - 3$ (on hi han $y + 3$ dosos en el primer terme).

EF7. Demostrareu que $f(n \cdot 3) \geq n$ i $f(3 \cdot n) = n$ si $n \leq 3333$. Usant $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$ establireu que $1982 \geq 3f(1982)$ i $f(1982) \geq 660$ o sigui $f(1982) = 660$.

EF8. Estudieu els possibles punts fixos de f . Provareu que $f(x) = 1/x$.

EF9. Demostreu que $f(-x) = f(x)$, $f(x) > 0$ i per inducció $f(n, x) = [f(x)]^{n^2}$. D'aquí provareu que $f(\frac{m}{n}) = (f(1))^{m^2/n^2}$ i per continuïtat $f(x) = f(1)^{x^2}$.

EF10. Observeu que $f(x) = 0$ si $x \geq 2$ i $f(y) = 2/(2-y)$ si $0 \leq y < 2$.

EF11. Si existís una funció f satisfent la condició donada seria $f(n+1987) = f(n)+1987$; $g(n) = f(n) - 1987$ seria inversa de f i $\{n|0 \leq n \leq 1986, f(n) < 1987\}$ conjuntament amb $\{n|0 \leq n \leq 1986, f(n) \geq 1987\}$ serien conjunts d'igual cardinal formant partició de $\{0, 1, \dots, 1986\}$.

EF12. Feu inducció per a verificar que $f(m, n) < n+1$ per tot $n \leq m$.

EF13. Cal verificar per inducció que $f(n)$ es el nombre obtingut capgirant el desenvolupament binari de n . Resulta que el nombre buscat és 92.

EF14. Proveu que necessàriament $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -1$ i que $f(x) = x+1$, per tot x racional.

EF15. Observeu que $4n+9 = 2(2n+3)+3$ i $1789 = 2 \times 893 + 3 \dots$ fins a veure que $f(1789) = 3581$.

EF16. Demostreu que l'equació és equivalent a l'equació multiplicativa de Cauchy $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, la qual en $\mathbb{Q}^+$ té infinites solucions (arbitraris en els primers).

EF17. Podeu veure que $f(x) = 0$ per tot x , tot establint primer que f és parella, o sigui $f(-z) = f(z)$.

EF18. Proveu que $f(0) = 0$ i $f(f(x)) = x$, deduint d'aquest fet que necessàriament $f(x) > x$, per tot x , la qual cosa podeu provar mirant que passaria si $f(x) > x$ o $f(x) < x$.

EF19. Un exemple curiós és $f(n) = [n(1+\sqrt{5})/2 + 1/2]$, on $[z]$ denota la part entera de z .

EF20. Proveu que $f(x) \neq x$ si $-1 < x < 0$ o $0 < x$. Deduïu d'aquí que $x+f(x)+xf(x) \equiv 0$ o sigui $f(x) = -x/(1+x)$.

REFERÈNCIES

Si voleu saber moltes coses d'equacions funcionals podeu consultar algun dels set llibres següents però s'us recomana molt especialment el primer per ser el llibre més important del tema.

- [1] J. ACZÉL, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic Press, New York-London, 1966.
- [2] J. ACZÉL, *A Short Course on Functional Equations*. Reidel, Dordrecht, 1987.
- [3] J. ACZÉL i J. DHOMBRES, *Functional Equations in Several Variables*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [4] M. KUCZMA, *Functional Equations in a Single Variable*. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.
- [5] M. KUCZMA, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. P.W.N. Uniw. Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice, 1985.
- [6] M. KUCZMA, B. CHOCZEWSKI i R. GER, *Iterative Functional Equations*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press. Cambridge, 1988.
- [7] J. SMITAL, *On Functions and Functional Equations*, Adam Hilger, Bristol, 1988.

Resum de bibliografia anglesa

- Judita Cofman, *What to solve?*, Claredon Press-Oxford, 1990.
- M.S. Klamkin, *USA Mathematical Olympiads 1972-1986*, Math. Ass. of Amer., 1988
- M.S. Klamkin, *International Mathematical Olympiads 1959-1977*, Math. Ass. of Amer., 1978
- M.S. Klamkin, *International Mathematical Olympiads 1978-1985*, Math. Ass. of Amer., 1986
- N.L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 1989.
- F.S. Roberts, *Applied Combinatorics*, Prentice-Hall, 1984.
- H. S. M. Coxeter i S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America.
- H. Eves, *A survey of geometry*, Allyn and Bacon.
- L. C. Larson, *Problem-solving through problems*, Springer-Verlag.

Resum de bibliografia castellana

- F. Bellot, M.V. Deban, F. López, *Olimpiada matematica española*, I.C.E., Univ. de Valladolid, 1992
- F. Bellot, M.V. Deban, F. López, *Cien problemas de matemáticas*, I.C.E., Univ. de Valladolid, 1994
- Col·lecció *La Tortuga de Aquiles*, DLS-Editores, Madrid (traduccions dels llibres de la Math. Ass. of America).
- R.P. Grimaldi, *Matemática Discreta y Combinatoria*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*. Limusa.
- P. Fauring et al., *10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas*. Publicaciones de la Organización de Estados Iberoamericanos, 1997.
- P. Puig Adam, *Curso de Geometría métrica (Tomo I - Fundamentos)*. Gómez Puig Ediciones.

Resum de bibliografia catalana

- 1r FORUM de problemes 93/94, Societat Catalana de Matemàtiques, Institut d'Estudis Catalans.
- 2n FORUM de problemes 94/95, Societat Catalana de Matemàtiques, Institut d'Estudis Catalans.

